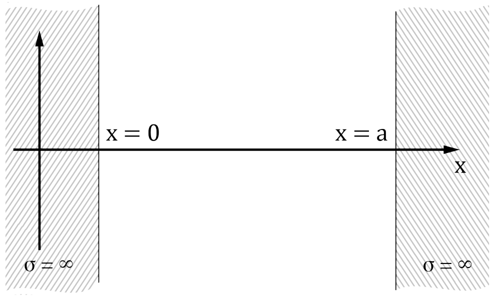
3. Tutorium VU Quantentheorie I, 23.10.2020

1. Wir betrachten die Modendichte eines schwarzen Körpers mit perfekt leitenden Wänden.

   a) Es sei ein eindimensionaler Hohlraum der Länge a mit perfekt leitenden Wänden (Skizze) gegeben. Welche Randbedingungen stellen die perfekt leitenden Wände an das $\mathbf{E}$-Feld? Geben Sie anhand dieser Überlegung nun das stationäre $\mathbf{E}$-Feld an.



   b) Geben Sie die Anzahl der Moden $N(\omega \leq \omega_G)$ bis zu einer Grenzfrequenz ω_G für den eindimensionalen Hohlraum an (*Hinweis*: $\omega = kc$).

   c) Man betrachte nun einen dreidimensionalen würfelförmigen Hohlraum der Kantenlänge L mit perfekt leitenden Wänden. Wie sehen nun die Randbedingungen aus? Geben Sie darauf basierend die stationären Eigenschwingungen $\mathbf{E}_{l,m,n}$ des Hohlraums an (*Hinweis*: die Normalkomponente des $\mathbf{E}$-Feldes unterliegt an den Wänden keiner Einschränkung).

   d) Geben Sie die Zahl der Moden $N(|\mathbf{k}| \leq k_G)$ an. Wandeln Sie dieses Ergebnis in die Modenzahl im Frequenzraum, $N(\omega \leq \omega_G)$, um. (*Hinweis*: Bedenken Sie die Polarisation und die Positivität der einzelnen Komponenten von $\mathbf{k}$).

   e) Geben Sie die Dichte der elektromagnetischen Moden an:

$$n(\omega) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

   f) Verbinden Sie das Ergebnis für $n(\omega)$ mit Ihrem Ergebnis von Beispiel 3b) des 2. Tutoriums um das Plancksche Strahlungsgesetz aufzustellen.

2. Beantworten Sie folgende Fragen aus der Atomphysik:

   a) Die Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms (im Grundzustand) liegt bei $E_{\text{ion}} = 13.6$ eV. Berechnen Sie die Frequenz und Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung die in diesem Fall für die Ionisierung mindestens benötigt wird. Um welche Art von Strahlung handelt es sich dabei?

b) In der Nähe des Atomkerns kann die Energie eines Photons in ein Elektron-Positron-Paar konvertiert werden. Berechnen Sie die minimale Energie des Photons (in MeV) die für diesen Prozess vonnöten ist. Berechnen Sie wiederum Frequenz und Wellenlänge der entsprechenden elektromagnetischen Strahlung.

c) Ein He-Ne-Laser emittiert monochromes Licht mit einer Wellen-länge von $\lambda = 633$nm. Wieviele Photonen werden von dem Laser pro Sekunde emittiert, wenn dieser eine Leistung von 1mW hat?

d) Berechnen Sie die Frequenz und Wellenlänge von Elektronen, wenn diese durch eine Spannungsdifferenz von $1000\,V$ beschleunigt wurden.

3. Ein freies Teilchen der Masse m bewege sich auf einem eindimensionalen Stab der Länge L. Die Dynamik des Teilchens ist bestimmt durch folgende Schrödingergleichung,

$$H_0\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\,, \quad \text{mit} \quad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,.$$

a) Berechnen Sie die stationären Zustände für dieses System (gegeben durch $\phi_n(x)\exp[-iE_nt/\hbar]$) unter Annahme von periodischen Randbedingungen an den beiden Enden des Stabes ($x = 0, L$). Geben Sie den Randbedingungen physikalischen Sinn.

b) Wievielfach sind die einzelnen Energieeigenwerte E_n entartet? (Der Grad der Entartung M des Eigenwertes E_n ist gegeben durch die Anzahl von zueinander linear unabhängigen Eigenvektoren $[\phi_n(x)]_i$, die demselben Eigenwert E_n zugeordnet sind.)

c) Zeigen Sie explizit dass jeder Zustand der Form,

$$\tilde{\phi}_n(x) = \sum_{i=1}^{M} c_{n,i}[\phi_n(x)]_i\,,$$

Eigenzustand zu H_0 ist, unabhängig von den komplexen Koeffizienten $c_{n,i}$.

d) Skizzieren Sie die Dispersionsrelation des Systems.

e) Betrachten Sie nun den Zusammenhang zwischen den Energieeigenwerten aus a) und dem Bohr'schen Atommodell, dessen Vorhersage für die Energieniveaus des Wasserstoffatoms $E_n \propto -1/n^2$ ist.
I) Warum unterscheidet sich das Vorzeichen?
II) Warum erlaubt die spezielle Form des Coulombpotenzials unendlich viele gebundene Zustände im Wasserstoffatom?
III) Diskutieren Sie die unterschiedlichen Abhängigkeiten von der Quantenzahl n.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2/3ab/3cde