4. Tutorium VU Quantentheorie I, 30.10.2020

1. Ein Teilchen der Masse m, das sich nur entlang einer kartesischen Koordinate x bewegen kann, befinde sich in einem unendlich tiefen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} \infty\,, & x < 0 \\ 0\,, & 0 < x < L \\ \infty\,, & x > L \end{cases}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die normierte Wellenfunktion dieses Teilchens gegeben durch

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{105}{L^7}}\, x^2(L - x)\,, & 0 < x < L \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie einen Ausdruck für die Wellenfuntion zu einem späteren Zeitpunkt $\psi(x, t > 0)$ an, indem Sie die Wellenfunktion nach den Eigenfunktionen des unendlich tiefen Potentialtopfes entwickeln.

b) Handelt es sich um eine zeitlich periodische Evolution? Falls ja, berechnen Sie diese Periode.

c) Verwenden Sie $L = m = \hbar = 1$ und stellen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens für $t = 0$, $t = \frac{1}{4\pi}$ und $t = \frac{2}{\pi}$ graphisch dar.

Hinweise: Die Eigenfunktionen des unendlich tiefen Potentialtopfs können als bekannt vorausgesetzt werden. Beachten Sie, dass bereits wenige Glieder Ihrer Entwicklung ausreichen um das Verhalten des Teilchens zu beschreiben.

2. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im unendlich tiefen Potentialtopf, d.h.

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & |x| > a \\ 0 & |x| \leq a \end{cases} .$$

Die dazugehörigen stationären Bindungszustände sind

$$u_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a} x\right), \; n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$u_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a} x\right), \; n = 2, 4, 6, \ldots$$

Wir betrachten nun den Zustand $\psi(x, t = 0) = A[u_0(x) + e^{i\phi} u_1(x)]$, wobei $\phi \in [0, 2\pi)$ ist und A die Normierung.

a) Normieren Sie den Zustand geeignet und stellen Sie anschließend $|\psi(x,0)|^2$ für $\phi = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi\}$ mit Hilfe des Computers graphisch dar und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ von $\psi(x,0)$.

c) Berechnen Sie die Standardabweichung der Ortsverteilung, d.h. die Ortsunschärfe $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, für $\psi(x,0)$. Was bedeutet der Begriff Ortsunschärfe in dem Zusammenhang anschaulich?

d) Vergleichen Sie $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ und Δx eines Zustandes u_n mit den Erwartungswerten eines klassischen Teilchens. Beachten Sie, dass die klassische Wahrscheinlichkeitsdichte $W(x)dx$ das Teilchen bei unbekanntem Aufenthaltsort im Intervall $[x, x+dx]$ zu finden gleich $W(x)dx = \frac{1}{2a}dx$ ist.

e) Die Zeitentwicklung von $\psi(x,0)$ für $\phi = 0$ lautet

$$\psi(x,t) = A[u_0(x)e^{-i\omega_0 t} + u_1(x)e^{-i\omega_1 t}].$$

Verwenden Sie die Ergebnisse von a) bzw. b) um den zeitlichen Erwartungswert $\langle x(t) \rangle$ graphisch zu skizzieren. [*Hinweis*: Zeigen Sie hierzu, dass das Hinzufügen einer Phase zu A (globale Phase) den Erwartungswert nicht ändert.]

3. Untersuchen Sie in diesem Beispiel wie sich die Wellenfunktion $\psi(x)$ an einer Diskontinuität des Potentials $V(x)$ verhält. Betrachten Sie dazu die zeitunabhängige Schrödingergleichung in einer Dimension:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)\,.$$

Die zu untersuchenden Potentiale $V(x)$ besitzen eine Diskontinuität an der Stelle x_0:

a) Potentialstufe: $V(x) = V_0\,\Theta(x - x_0), \quad V_0 \in \mathbb{R}\,.$

b) Delta-Funktion: $V(x) = D\,\delta(x - x_0), \quad D \in \mathbb{R}\,.$

Untersuchen Sie für diese beiden Fälle, ob die Wellenfunktion $\psi(x)$ an der Stelle x_0 stetig bzw. stetig differenzierbar bleibt. Skizzieren Sie den Verlauf von $\psi(x)$ in der Umgebung von x_0. Was passiert im Fall (a) wenn $V_0 \to \infty$?

Hinweis: Lösen Sie das Problem, indem Sie die Schrödingergleichung räumlich aufintegrieren (betrachten Sie dabei speziell die räumliche Umgebung des Potentialsprungs).

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2abc/2de/3