5. Tutorium VU Quantentheorie I, 06.11.2020

1. Betrachten Sie den in Abbildung 1 dargestellten Aufbau für die Beugung eines von links einfallenden Stroms von Teilchen an einem Spalt der Breite d. Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion der Teilchen direkt am Spalt ($x = x_0$) durch eine kastenförmige Welle beschrieben wird, die sich in Einfallsrichtung x wie eine ebene Welle mit Impuls $\hbar k_0$ bewegt,

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \exp(ik_0 x)/\sqrt{d} & -d/2 \le y \le d/2 \\ 0 & |y| > d/2 \end{cases} .$$

Die Teilchen werden auf einem Schirm gemessen, der sich in einem Abstand L vom Spalt befindet.

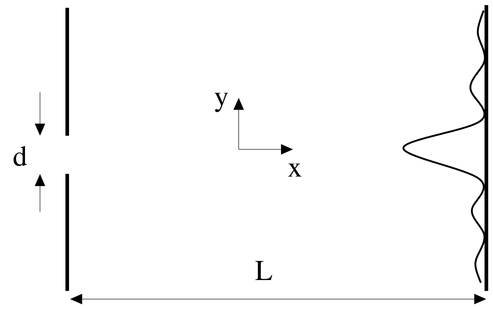

Abbildung 1: Experiment zur Beugung am Spalt.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $\psi(x, y)$ im Spalt ($x = x_0$). Überprüfen Sie, ob die Heisenbergsche Unschärferelation für Ort y und Impuls p_y erfüllt ist. (*Hinweis:* Schätzen Sie die Unschärfen σ_y, σ_{p_y} der Einfachheit halber mit dem Abstand zwischen den ersten beiden Nullstellen der jeweiligen Funktionen ab.)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(y)$ ein Teilchen an der Position y des Schirms (bei festem $x = x_0 + L$) zu messen (unter der Annahme $L \gg d, y$ und dass zwischen Spalt und Schirm kein Potential auf das Teilchen wirkt, d.h. dass dort gilt: $V(x, y) = 0$). Verwenden Sie dabei, dass die Fourier-Transformierte aus (a) die Wahrscheinlichkeit angibt, dass die Teilchen einen bestimmten Impuls in y-Richtung aufweisen. Reproduzieren Sie damit das bekannte Resultat aus der Beugungstheorie,

$$P(y) = C \left[\frac{\sin(Ay)}{Ay} \right]^2 .$$

Bestimmen Sie die Konstanten A, C.

c) Erläutern Sie Ihr Ergebnis für $P(y)$ anhand des Huygensschen Prinzips (siehe dazu optische Beugung am Spalt).

2. Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{m}\, D\, \delta(x), & |x| \leq a \\ +\infty, & |x| > a, \end{cases}$$

wobei $D > 0$ und $a > 0$. Skizzieren Sie zunächst das Potential. Betrachten Sie anschließend die gebundenen Zustände des Systems mit Energie $E < 0$ und zeigen Sie, dass es für negative Energien E im Falle $Da \leq 1$ überhaupt keinen gebunden Zustand und im Falle $Da > 1$ einen einzigen gebundenen Zustand gibt.

Hinweis: Verwenden Sie für die Anschlussbedingungen an der Stelle $x = 0$ die Resultate von Bsp. 3b der vorigen Woche und lösen Sie die für $E < 0$ erhaltene Eigenwertbedingung graphisch.

3. Gegeben sind zwei anziehende δ-Potentiale, die sich im Abstand $2a$ voneinander befinden,

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\, D\, \delta(x + a) - \frac{\hbar^2}{m}\, D\, \delta(x - a)\,, \quad D > 0\,,\ a > 0\,.$$

   a) Gehen Sie davon aus, dass durch die Symmetrie des Potentials $V(x)$ die gebundenen Wellenfunktionen gerade bzw. ungerade sein müssen. Bestimmen Sie die Bedingungen für die Existenz (i) der geraden und (ii) der ungeraden gebundenen Zustände.

   b) Zeigen Sie durch graphisches Lösen der Eigenwertbedingungen aus a), dass es immer mindestens einen gebundenen Zustand gibt. Unter welchen Bedingungen gibt es (i) zwei oder (ii) mehr als zwei gebundene Zustände?

   c) Skizzieren Sie den Verlauf der gebundenen Zustände für verschiedene Werte von a und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse im Kontext von kovalenter Bindung eines zweiatomigen Moleküls. Motivieren Sie qualitativ auf Basis Ihrer Ergebnisse, warum ein molekularer Bindungszustand energetisch günstiger ist als der Zustand zweier ungebundener Atome.

   d) Berechnen Sie nun die Transmissionswahrscheinlichkeit T für ein in positive x-Richtung laufendes Teilchen der Masse m und Energie $E = \hbar^2 D^2/(2m)$ als Funktion von Da. Bestimmen Sie außerdem die Reflexionswahrscheinlichkeit R aus der Erhaltung der Wahrscheinlichkeitsstromdichte und skizzieren Sie den Verlauf von T bzw. R.

   e) Bestimmen Sie jene Werte von Da, für welche die Transmission am größten bzw. am kleinsten ist, sowie die zugehörigen Werte T_{max} und T_{min}.

   f) Bringen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Konzept eines Fabry-Pérot-Interferometers aus der Optik in Verbindung.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2/3abc/3def