7. Tutorium VU Quantentheorie I, 20.11.2020

1. Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei hermitesche Operatoren für die $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ gilt. Zunächst soll theoretisch gezeigt werden, dass es unter diesen Voraussetzungen eine gemeinsame orthonormale Eigenbasis von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gibt.

   a) Sei $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zum Eigenwert a, also $\hat{A}\,|\psi\rangle = a\,|\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass dann $(B\,|\psi\rangle)$ ebenso ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zum selben Eigenwert a ist.

   b) Damit haben Sie gezeigt, dass sowohl $|\psi\rangle$ als auch $(\hat{B}\,|\psi\rangle)$ Eigenvektoren von $\hat{A}$ zum Eigenwert a sind. Begründen Sie, warum daraus für nicht-entartete Eigenwerte a folgt, dass $|\psi\rangle$ auch ein Eigenvektor von $\hat{B}$ ist.
   Hinweis: Eine hermitesche Matrix besitzt eine orthogonale Eigenbasis.

   c) Nehmen Sie nun an, der Eigenwert a sei 2-fach entartet und $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ seien orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert a (demnach eine Basis dieses Unterraums U). Zeigen Sie, dass dieser Unterraum invariant gegenüber B ist, dass also auch $(B(c_1\,|\phi_1\rangle + c_2\,|\phi_2\rangle) \in U$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.
   Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Unterpunkt (a).

   d) Seien nun $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ zwei Eigenvektoren von $\hat{A}$ zu verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass dann das Matrixelement

   $$\langle\psi_1\,|B|\,\psi_2\rangle = 0. \tag{1}$$

   Hinweis: Betrachten Sie $\langle\psi_1\,|[A, B]|\,\psi_2\rangle$ *und verwenden sie* $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$.

2. Um die soeben erbrachten theoretischen Überlegungen anzuwenden, betrachten wir die beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, die in der Basis $\{|e_1\rangle, \dots, |e_4\rangle\}$ die Darstellung

   $$A^{\{e\}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2i \\ 0 & 0 & -2i & 5 \end{pmatrix}, \quad B^{\{e\}} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   haben. Sie sollen zeigen, dass $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren sind, die zueinander komplementär sind. Schließlich soll eine gemeinsame vollständige Orthonormalbasis von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ berechnet werden, d.h.

   $$\hat{A}\,|a_i, b_j\rangle = a_i\,|a_i, b_j\rangle \quad \text{und} \quad \hat{B}\,|a_i, b_j\rangle = b_j\,|a_i, b_j\rangle\,.$$

   a) Überprüfen Sie, dass $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ und $\hat{B}^\dagger = \hat{B}$.

   b) Berechnen Sie nun die Eigenwerte a_i von $\hat{A}$ und b_j von $\hat{B}$ und ordnen Sie diese in aufsteigender Reihenfolge.

c) Berechnen Sie anschließend die Eigenvektoren $|\alpha_i\rangle$ zu den zugehörigen Eigenwerten a_i von $\hat{A}$ in der Basis $\{e\}$ und definieren Sie die unitäre Matrix $S_\alpha^{\{e\}} = \left(|\alpha_1\rangle^{\{e\}}, \dots, |\alpha_4\rangle^{\{e\}}\right)$, welche den Basiswechsel von der Basis $\{e\}$ in die Basis $\{\alpha\}$ darstellt.
Hinweis: Achten Sie auf die Normierung!

d) In Bsp. 1b haben Sie gezeigt, dass Eigenvektoren zu nicht-entarteten Eigenwerten von $\hat{A}$ automatisch auch Eigenvektoren von $\hat{B}$ sind. Zeigen Sie, dass der Eigenvektor zum nicht-entarteten Eigenwert mit dem Wert 7 bereits Eigenvektor von $\hat{B}$ ist und bestimmen sie den zugehörigen Eigenwert b von $\hat{B}$. Geben Sie den gemeinsamen Eigenvektor $|a_i, b_j\rangle^{\{e\}}$ an.

e) Bestimmen Sie die Darstellung $\hat{B}^{\{\alpha\}}$ von $\hat{B}$ in der Eigenbasis von $\hat{A}$.
Hinweis: Sei γ eine beliebige Basis, dann gilt ${}^{\{\gamma\}}\left\langle \alpha_i \middle| \hat{B}^{\{\gamma\}} \middle| \alpha_j \right\rangle^{\{\gamma\}} = \hat{B}_{ij}^{\{\alpha\}}$.

f) Diagonalisieren Sie die entarteten Unterräume von $B^{\{\alpha\}}$ und bestimmen Sie daraus die restlichen gemeinsamen Eigenvektoren $|a_i, b_j\rangle^{\{e\}}$.
Achtung: Beim Diagonalisieren von $\hat{B}^{\{\alpha\}}$ erhalten Sie die resultierenden Eigenvektoren $|\beta_j\rangle^{\{\alpha\}} \neq |\beta_j\rangle^{\{e\}}$.

g) Schreiben Sie das gemeinsame orthonormale Basissystem $|a_i, b_j\rangle$ von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der $\{e\}$- und $\{\alpha\}$-Darstellung an.

h) Zusatzfrage (nicht bewertet): Handelt es sich um einen vollständigen Satz kommutierender Observablen?

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2