8. Tutorium VU Quantentheorie I, 27.11.2020

1. Der Partitätsoperator $\hat{\Pi}$, der eine räumliche Spiegelung am Punkt $x = 0$ durchführt, kann durch seine Wirkung auf die Eigenzustände $|x\rangle$ des Ortsoperators $\hat{X}$ definiert werden,

$$\hat{\Pi}\,|x\rangle = |-x\rangle \ ,$$

oder äquivalent dazu im Zustandsraum $\mathcal{H}$ des Teilchens als,

$$\hat{\Pi}\psi(x) = \psi'(x) = \psi(-x)\,.$$

   a) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^{-1}$ und $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^{\dagger}$.
   Hinweis: Hermitizität bedeutet, dass $\langle\phi|\hat{A}\psi\rangle = \langle\hat{A}\phi|\psi\rangle$. Wählen Sie Zustände $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ von denen Sie die Wirkung von $\hat{\Pi}$ kennen.

   b) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi}$ nur Eigenwerte $\pi = \pm 1$ hat.

   c) Bisher haben Sie die Wirkung von $\hat{\Pi}$ auf Zustände betrachtet. Leiten Sie das Transformationsverhalten von Operatoren $\hat{Q}$ bei einer räumlichen Spiegelung her. Gehen Sie dazu von der Annahme aus, dass der Erwartungswert nicht davon abhängen darf, ob man die Zustände oder den Operator spiegelt, d.h.

$$\langle\psi'|\hat{Q}|\psi'\rangle = \langle\psi|\hat{Q}'|\psi\rangle,$$

   wobei $|\psi'\rangle = \hat{\Pi}\,|\psi\rangle$. Hier beschreibt $\hat{Q}'$ den gespiegelten Operator von $\hat{Q}$.
   Hinweis: Sie haben in (a) gezeigt, dass $\hat{\Pi}^2 = \mathbb{1}$.

   d) Zeigen Sie mithilfe der Transformationsregel für Operatoren aus (c), dass der Ortsoperator $\hat{X}$ und der Impulsoperator $\hat{P}$ ungerade Parität besitzen, d.h. dass

$$\hat{X}' = -\hat{X} \quad \text{und} \quad \hat{P}' = -\hat{P}.$$

   Wie passt diese Erkenntnis mit Ihrer Intuition aus der klassischen Physik zusammen?

   e) Zeigen Sie nunmehr, dass der Hamiltonoperator $\hat{H}$ für symmetrische Potentiale, $\hat{V}(\hat{X}) = \hat{V}(-\hat{X})$, mit $\hat{\Pi}$ kommutiert, d.h.

$$[\hat{H}, \hat{\Pi}] = 0.$$

   Nehmen Sie an, dass alle diskreten Eigenwerte von $\hat{H}$ nicht entartet sind.[1] Was folgt unter dieser Annahme dann aus $[\hat{H}, \hat{\Pi}] = 0$ für die Symmetrie-Eigenschaften der Eigenzustände von $\hat{H}$?
   Hinweis: siehe Sondertutorium der letzten Woche.

[1] Der Beweis dazu soll in Beispiel 2a erbracht werden.

2. Ein Teilchen der Masse m, das sich nur entlang einer Koordinate bewegen kann, befindet sich in einem gebundenen Zustand $\psi(x)$ des Potentials $V(x)$ und besitzt die Energie E.

   a) Zeigen Sie, dass es in eindimensionalen Potentialen keine entarteten gebundenen Eigenzustände gibt, d.h. aus

   $$\left.\begin{aligned} \hat{H}\psi_1(x) &= E\psi_1(x) \\ \hat{H}\psi_2(x) &= E\psi_2(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{folgt} \quad \psi_2(x) \propto \psi_1(x).$$

   Hinweis: Multiplizieren Sie die stationäre Schrödingergleichung für $\psi_1(x)$ mit $\psi_2(x)$ und umgekehrt und subtrahieren die beiden Gleichungen.

   b) Beweisen Sie mithilfe des Ergebnisses von (a), dass die Wellenfunktionen der gebundenen Eigenzustände eines eindimensionalen Potentials (ohne Magnetfeld) immer reell gewählt werden können.
   Hinweis: Betrachten Sie die komplex-konjugierte Schrödingergleichung.

3. Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator, der durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird

   $$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{X}^2.$$

   a) Zeigen Sie zunächst unter Verwendung der Bra-Ket-Schreibweise, wie die Wirkung des Ortsoperators im Impulsraum zu verstehen ist, d.h., berechnen Sie folgenden Ausdruck: $\langle p|\hat{x}|\psi\rangle$.
   Nützliche Formeln:
   $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$, $\quad \langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$, $\quad \langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$,
   $\mathbb{1} = \int dx\,|x\rangle\langle x| = \int dp\,|p\rangle\langle p|$.

   b) Geben Sie die Schrödingergleichung für den harmonischen Oszillator im Impulsraum an. Bringen Sie die so erhaltene Differentialgleichung in eine dimensionslose Form und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der in der Vorlesung behandelten Gleichung in der Ortsdarstellung. Welche Aussagen können Sie auf dieser Basis über die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators im Impulsraum treffen?

   c) Berechnen Sie den Grundzustand des harmonischen Oszillators im Impulsraum $\bar{\psi}_0$ mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes und normieren Sie diesen Zustand. Berechnen Sie nun die Impulsunschärfe Δp und die Ortsunschärfe Δx und zeigen Sie, dass der Grundzustand ein Zustand minimaler Unschärfe ist.

4. Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} W(x), & x \geq 0, \\ +\infty, & x < 0, \end{cases}$$

wobei das Potential $W(x)$ symmetrisch ist, d.h., $W(x) = W(-x)$.

a) Betrachten Sie zunächst nur das Potential $W(x)$ und zeigen Sie, dass die Krümmung der Wellenfunktion $\Psi''(x)$ in den *klassisch erlaubten Bereichen* $[\forall x : E > W(x)]$ das umgekehrte Vorzeichen wie die Wellenfunktion $\Psi(x)$ bzw. in den *klassisch verbotenen Bereichen* $[\forall x : E < W(x)]$ dasselbe Vorzeichen wie die Wellenfunktion aufweist (4 Fallunterscheidungen). Verwenden Sie dazu das Ergebnis aus Bsp. 2(b), dass die Wellenfunktionen von gebundenen Zuständen in 1D (ohne Entartung) immer reell gewählt werden können. Was passiert mit der Krümmung an den Nullstellen der Wellenfunktion bzw. an den Stellen $E = W$?

b) Überlegen Sie, wie Sie aus den Symmetrie-Eigenschaften von $W(x)$ die Eigenzustände des Potentials $V(x)$ bestimmen können, wenn die Eigenzustände von $W(x)$ bereits bekannt sind.
Hinweis: Kombinieren Sie die Überlegungen aus (a) mit den Erkenntnissen aus Beispiel 1.

c) Bestimmen Sie auf Basis dieser Überlegungen die Eigenenergien, sowie die normierten Eigenzustände des Potentials $V(x)$ für den Fall $W(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Skizzieren Sie anschließend das Potential $V(x)$ und die Wellenfunktionen der drei Zustände mit den niedrigsten Energien in diesem Potential.
Hinweis: Die Eigenenergien und Eigenzustände des harmonischen Oszillators können als bekannt angenommen werden.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4