9. Tutorium VU Quantentheorie I, 11.12.2020

1. Betrachten Sie das im Pariser Panthéon angebrachte Foucaultsche Pendel. Dieses besteht aus einer Masse $m = 28$kg, die an einem (masselosen) Draht der Länge $l = 67$m angebracht ist (siehe Abbildung 1). In der Schwingungsebene des Pendels führt die Masse Oszillationen mit einer Maximalamplitude von $x_{\max} = 3$m durch (ohne Reibung).

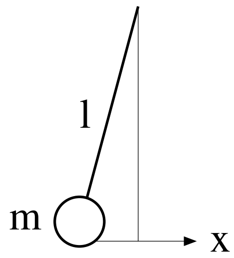

Abbildung 1: Klassisches Pendel.

   a) Zeigen Sie, wie die klassische Kreisfrequenz ω des Pendels mit der Drahtlänge l und der Fallbeschleunigung g zusammenhängt (unter der Voraussetzung von kleinen Schwingungsamplituden).

   b) Welcher quantenmechanische Zustand beschreibt die klassische Pendelbewegung am genauesten? Passen Sie den entsprechenden Zustand an die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ an: $x(t_0) = x_{\max}$ und $p(t_0) = 0$.

   c) Berechnen Sie die Orts- und Impulsunschärfen Δx, Δp für diesen Zustand. Überprüfen Sie, ob Ihr Zustand das kleinstmögliche Unschärfeprodukt erfüllt. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für Δx mit der Größe eines Protons.

   d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle E \rangle$ und die Energieunschärfe ΔE des Zustands. Bestätigen Ihre Ergebnisse die Erwartung, dass für makroskopische Objekte die relative Energieunschärfe klein ist, d.h. $\Delta E / \langle E \rangle \ll 1$?

   e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ bei einer Energiemessung an diesem Oszillator-Zustand die Energie $E_n = \hbar\omega(2n+1)/2$ zu erhalten? Skizzieren Sie den Verlauf von $W(n)$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit jenem, das Roy Glauber für Sie auf seinem Poster aufgeschrieben hat (sh. Vorlesungsfolien). Um welche Verteilung handelt es sich hier? Genau diese Verteilung wird nach Glauber die Photonenzahl-Statistik in einem kohärenten Laserstrahl beschreiben.

   Bemerkung: Mehr zum Thema Foucaultsches Pendel finden Sie unter folgendem Link: *https://en.wikipedia.org/wiki/Foucault_pendulum*

2. Gegeben sei der eindimensionale harmonische Oszillator, welcher durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} .$$

a) Geben Sie die „Energie-Darstellung“ (i) des Ortsoperators x und (ii) des Impulsoperators p an, indem Sie die entsprechenden Matrix-Elemente $\langle\psi_n| x |\psi_m\rangle$ bzw. $\langle\psi_n| p |\psi_m\rangle$ berechnen (es gilt $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$). Sind Ihre Matrizen hermitesch? Begründen Sie physikalisch warum alle Diagonalelemente der Matrizen verschwinden.

b) Drücken Sie die Matrixelemente $\langle\psi_n| p |\psi_m\rangle$ durch die Matrixelemente $\langle\psi_n| x |\psi_m\rangle$ aus, indem Sie $\alpha_{n,m}$ in

$$\langle\psi_n| p |\psi_m\rangle = \alpha_{n,m} \langle\psi_n| x |\psi_m\rangle$$

bestimmen.

c) Zeigen Sie auf Basis der Ergebnisse aus (a) und (b), dass im harmonischen Oszillator für jeden beliebigen Zustand $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} \sum_n c_n |\psi_n\rangle$ die Erwartungswerte für Ort und Impuls die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{m}\langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle ,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle = -\frac{\partial}{\partial\langle x\rangle}V(\langle x\rangle) = -m\omega^2\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle .$$

d) Betrachten Sie nun als Beispiel ein Teilchen, das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(x, 0) = A[3\psi_0(x, 0) + 4\psi_1(x, 0)]$ beschrieben wird. Normieren Sie zunächst die Wellenfunktion $\psi(x, 0)$ und bestimmen Sie anschließend $\psi(x, t)$ bzw. $|\psi(x, t)|^2$ für einen späteren Zeitpunkt $t > 0$.

e) Berechnen Sie nun für dieses Teilchen $\langle x(t)\rangle$ sowie $\langle p(t)\rangle$ und überprüfen Sie, ob in diesem Fall das Ehrenfest-Theorem erfüllt ist, das für allgemeine Potentiale gültig ist (Ableitung erfolgt in der VU Quantentheorie II):

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle p(t)\rangle = -\langle\frac{\partial}{\partial x}V(x)\rangle$$

f) Besprechen Sie auf Basis obiger Ergebnisse, wodurch sich kohärente (Glauber)-Zustände von beliebigen Zuständen im harmonischen Oszillator unterscheiden. (Im harmonischen Oszillator erfüllen ja offenbar die Mittelwerte von beiden Zustandsklassen die klassischen Bewegungsgleichungen.) Zeigen Sie weiters für welche Potentiale der Form $V(x) = V_0\, x^k$ die Mittelwerte beliebiger Wellenfunktionen die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen. Beachten Sie, dass dafür

$$\langle\frac{\partial}{\partial x}V(x)\rangle = \frac{\partial}{\partial\langle x\rangle}V(\langle x\rangle)$$

gelten muss.

3. Betrachten Sie eine Basis, die aus den normierten Eigenzuständen $|l, m_z\rangle = |l, m\rangle$ der Drehimpulsoperatoren L^2 und L_z für *fixes* $l=1$ und $m=-1, 0, 1$ gebildet wird.

   a) Für die Leiteroperatoren $L_\pm = L_x \pm iL_y$ gilt

   $$L_\pm \,|\, l, m\,\rangle \;=\; \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}\,|\, l, m \pm 1\,\rangle\,.$$

   Wie lautet die Matrixdarstellung von L_+ und L_- in der gegebenen Basis?

   b) Schreiben Sie auch die Matrixdarstellung der Operatoren L_x, L_y und L_z bezüglich der gegebenen Basis an. Verifizieren Sie anhand der resultierenden Matrizen die Beziehung $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$.

   c) Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen für L_x und L_+? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis!

   d) Ein Teilchen befinde sich im Drehimpulszustand $|l, m_x\rangle = |1, 1\rangle$. Wie wahrscheinlich ist es in diesem Fall bei einer Messung der z-Komponente des Drehimpulses den Wert $\hbar$ zu messen?

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2abc/2def/3