Technische Universität
Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi
Dr. A. Kauch, Priv.-Doz. J. Tomczak

1. Test zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2021/2022

Test A **Name:** **Matrikelnr.:**

A1	A2	A3	Σ
7+3*	9	9	25+3*

1. Verständnisfragen zur Quantentheorie

2+2+3+3=7+3* Punkte*

a) Welche Bedingungen müssen für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gelten, so dass der Operator

$$O = e^{\alpha A} \beta U$$

unitär ist, wenn A ein beliebiger hermitescher und U ein beliebiger unitärer Operator ist.

b) Gegeben sei der folgende Hamilton-Operator mit relativistischer Korrektur der kinetischen Energie ($\mathbb{1}$ ist der Identitätsoperator):

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + mc^2\, \mathbb{1}\ .$$

i) Geben Sie die Eigenfunktionen von H an.
ii) Bei einer Impulsmessung wurde der Wert p_0 gemessen. Geben Sie für eine anschließende Messung von H die möglichen Messwerte und Wahrscheinlichkeiten an.

c) Gegeben seien ein Spin-1/2-System mit Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ sowie die Operatoren $S_z = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ und $S_x = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. Das System sei im Zustand $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle$. Geben Sie für die Messung von $A = S_x + S_z$ die möglichen Messergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und kollabierten Wellenfunktionen an.

d*) Wir betrachten ein zweidimensionales System mit Koordinaten (x, y) und Hamiltonoperator

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

($p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$). Geben Sie alle nicht-normierten Eigenfunktionen $\psi(x, y)$ und Eigenenergien E von H an. Geben Sie für diese Eigenfunktionen bei Messung des Operators y die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

2. Harmonischer Oszillator

2+2+4+1=9 Punkte

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen harmonischen Potential, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ durch folgende Wellenfunktion gegeben sei:

$$\psi(x, t = 0) = \gamma \left(\sqrt{2}(a^\dagger)^2 + e^{-i\varphi} a^\dagger a + 2ia^\dagger \right) \psi_0 \qquad (1)$$

Hierbei bezeichnet ψ_0 die Grundzustandswellenfunktion des harmonischen Oszillators, $a^\dagger$ und a sind die üblichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (Leiteroperatoren); $\varphi > 0$.

a) Normieren Sie die Wellenfunktion $\psi(x, t = 0)$, d.h. bestimmen Sie die Konstante γ.

b) Bestimmen Sie für obigen Zustand die Zeitentwicklung, d.h. $\psi(x, t)$, und die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

c) Bestimmen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle x\rangle(t)$, $\langle p\rangle(t)$ und $\langle x^2\rangle(t)$. Erfüllen die Erwartungswerte die "klassische" Bewegungsgleichung?

d) Zum Zeitpunkt t wird eine Energiemessung durchgeführt. Geben Sie die möglichen Messergebnisse sowie ihre Wahrscheinlichkeiten an. Berechnen Sie auch den Erwartungswert des Hamilton-Operators.

3. Eingesperrtes Teilchen

2+1+5+1=9 Punkte

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in dem Potenzial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < -a \\ 0 & \text{für } -a \leq x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{für } x > a \end{cases} \tag{2}$$

Dabei seien V_0 und a positive Konstanten.

a) Skizzieren Sie das Potenzial. Geben Sie an, wie die Anschluss- und Randbedingungen für die Wellenfunktion aussehen.

b) Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion für eine Energie $E > V_0$.

c) Lösen Sie die stationäre (eindimensionale) Schrödinger-Gleichung für Energie $E > V_0$ (ohne Normierung). Bestimmen Sie dabei die implizite Gleichung (d.h. Auflösung nach E ist nicht notwendig) für die möglichen Werte der Energie E.

d) Wie ändert sich die Lösung (die Wellenfunktion und die implizite Gleichung für die Energie) im Fall $0 < E < V_0$?

Viel Erfolg!