
1. Test zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2021/2022

Test B	Name:	Matrikelnr.:	B1	B2	B3	Σ
			9	7+3*	9	25+3*

1. Potenzialstufe im unendlichen Potenzialtopf 2+1+5+1=9 Punkte

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in dem Potenzial

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{für } -L \leq x < 0 \\ 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{für } |x| > L \end{cases} \quad (1)$$

Dabei seien V_1 und L positive Konstanten.

- Skizzieren Sie das Potenzial. Geben Sie an, wie die Anschluss- und Randbedingungen für die Wellenfunktion aussehen.
- Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion für eine Energie $E > V_1$.
- Lösen Sie die stationäre (eindimensionale) Schrödinger-Gleichung für Energie $E > V_1$ (ohne Normierung). Bestimmen Sie dabei die implizite Gleichung (d.h. Auflösung nach E ist nicht notwendig) für die möglichen Werte der Energie E .
- Wie ändert sich die Lösung (die Wellenfunktion und die implizite Gleichung für die Energie) im Fall $0 < E < V_1$?

2. Theorieaufgaben

3+2+2+3*=7+3* Punkte

- Gegeben seien ein Spin-1/2-System mit Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ sowie die Operatoren $S_z = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ und $S_x = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. Das System sei im Zustand $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle$. Geben Sie für die Messung von $A = S_x - S_z$ die möglichen Messergebnisse, Wahrscheinlichkeiten und kollabierten Wellenfunktionen an.
- Welche Bedingungen müssen für $a, b \in \mathbb{C}$ gelten, so dass der Operator

$$O = aUe^{bB}$$

unitär ist, wenn B ein beliebiger hermitescher und U ein beliebiger unitärer Operator ist.

- c) Gegeben sei der folgende Hamilton-Operator mit relativistischer Korrektur der kinetischen Energie ($\mathbb{1}$ ist der Identitätsoperator):

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + mc^2 \mathbb{1} .$$

- i) Geben Sie die Eigenfunktionen von H an.
 ii) Bei einer Impulsmessung wurde der Wert p_M gemessen. Geben Sie für eine anschließende Messung von H die möglichen Messwerte und Wahrscheinlichkeiten an.
- d*) Wir betrachten ein zweidimensionales System mit Koordinaten (x, y) und Hamiltonoperator

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

($p_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$). Geben Sie alle nicht-normierten Eigenfunktionen $\psi(x, y)$ und Eigenenergien E von H an. Geben Sie für diese Eigenfunktionen bei Messung des Operators x die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

3. Zeitentwicklung

2+2+4+1=9 Punkte

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen harmonischen Potential, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ durch folgende Wellenfunktion gegeben sei:

$$\psi(x, t = 0) = N \left(\sqrt{2}(a^\dagger)^2 - 2ia^\dagger + e^{i\alpha} a^\dagger a \right) \psi_0 \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet ψ_0 die Grundzustandswellenfunktion des harmonischen Oszillators, a^\dagger und a sind die üblichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (Leiteroperatoren); $\alpha > 0$.

- a) Normieren Sie die Wellenfunktion $\psi(x, t = 0)$, d.h. bestimmen Sie die Konstante N .
 b) Bestimmen Sie für obigen Zustand die Zeitentwicklung, d.h. $\psi(x, t)$, und die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung.
 c) Bestimmen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle x \rangle(t)$, $\langle p \rangle(t)$ und $\langle p^2 \rangle(t)$. Erfüllen die Erwartungswerte die "klassische" Bewegungsgleichung?
 d) Zum Zeitpunkt t wird eine Energiemessung durchgeführt. Geben Sie die möglichen Messergebnisse sowie ihre Wahrscheinlichkeiten an. Berechnen Sie auch den Erwartungswert des Hamilton-Operators.

Viel Erfolg!