Musterlösung zu A1 bzw B2

A1a)
B2b)

$$O^+ O = \beta^* U^+ e^{\alpha^* A^+} e^{\alpha A} U$$

$$\overset{A^+=A}{=} |\beta|^2 U^+ e^{(\alpha^* + \alpha) A} U \overset{!}{=} 1$$

für beliebige $A \Rightarrow \alpha^* + \alpha \overset{!}{=} 0$ $\alpha = ir, r \in \mathbb{R}$ rein komplex

dann $O^+ O = |\beta|^2 U^+ U = |\beta|^2 \overset{!}{=} \mathbb{1}$

$\Rightarrow \beta \in \mathbb{C}$ mit $|\beta|^2 = 1$

In diesem Fall ist auch $O O^+ = |\beta|^2 e^{\alpha A} U U^+ e^{\alpha^* A^+} = 1$

B2b) ähnlich nur $\beta \to a$ $\alpha \to b$ $A \to B$, $O \leftrightarrow O^+$
$b \leftrightarrow b^*$
$a \leftrightarrow a^*$

A1b)
B2c)

(i) $\psi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ ist EF zu H mit

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^4 k^4}{8m^3c^2} + mc^2$$

(ii) Es wurde P_{0_m} gemessen. Kollaps der WF

$\Rightarrow \psi_{k_{0_m}} = \frac{e^{ik_{0_m}x}}{\sqrt{2\pi}}$, $k_{0_m} = \frac{1}{\hbar} P_{0_m}$ nach der Messung

Energiemessung mit 100 % Wahrsch.

$$E_{k_{0_m}} = \frac{\hbar^2 k_{0_m}^2}{2m} - \frac{\hbar^4 k_{0_m}^4}{8m^3c^2} + mc^2$$

A1d)
B2d)
$x \to y$

$\psi_{ky_0}(x,y) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \delta(y - y_0)$ mit Param k, y_0

Da H Summe $\Rightarrow$ Separationsansatz $\psi(x)\, \tilde{\psi}(y)$

$\delta(y - y_0)$ ist EF zu Op y und somit zu y^2

Messung von y: mit 100% Wahrscheinlichkeit y_0

A1c) in S_z Basis hat $A = S_x \pm S_z$ die Form

B2a)

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\tilde{A}}}}$$

S_x $-S_z$

EW: $$\det(\tilde{A} - \tilde{\lambda}\mathbb{1}) = \left|\begin{pmatrix} -1-\tilde{\lambda} & 1 \\ 1 & +1-\tilde{\lambda} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \tilde{\lambda}^2 - 1 - 1 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ EW $\tilde{\lambda}_\pm^2 = \pm 2$ bzw $\underline{\underline{\lambda_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\sqrt{2}}}$ EW zu $A = \frac{\hbar}{2}\tilde{A}$

EF $$(\tilde{A} - \tilde{\lambda}\mathbb{1})\begin{pmatrix} v_1^\pm \\ v_2^\pm \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1\mp\sqrt{2} & 1 \\ 1 & +1\mp\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^\pm \\ v_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1^\pm \\ v_2^\pm \end{pmatrix} = N\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ +1\pm\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad |N|^2 = \frac{1}{1+(+1\pm\sqrt{2})^2}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+1+2\mp(-1)2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\mp(-1)2\sqrt{2}}}$$

Wahrsch. $\underline{\underline{\lambda_\pm}}$ zu messen:

$$\underline{w_\pm} = |\langle\pm|\uparrow\rangle|^2 = \left|\begin{pmatrix} v_1^{\pm*} & v_2^{\pm*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4\mp(-1)2\sqrt{2}}}} \qquad \left(= \frac{1}{2}\left[1\pm(-1)\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \approx \begin{matrix} 85\% \\ 15\% \end{matrix}\beta\right)$$

A 2 Harmonischer Oszillator

B3 Zeitentwicklung

$$\psi(x,t=0) = \underset{N}{\gamma}\left(\sqrt{2}\,(a^\dagger)^2 \overbrace{+ \underset{e^{i\alpha}}{e^{-i\varphi}}\, a^\dagger a}^{\to 0,\ \text{da}\ a\psi_0=0} \underset{-}{+} 2ia^\dagger\right)\psi_0$$

a) Normierung

$$\psi(x,t=0) = \underset{N}{\gamma}\left(2\psi_2 \pm 2i\psi_1\right)$$

$$\int dx\,|\psi(x,t=0)|^2 \overset{!}{=} 1 \to 1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \underset{N^2}{\gamma^2}\left(4|\psi_2(x)|^2 + 4|\psi_1(x)|^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \underset{N^2}{\gamma^2}\cdot 8 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{N}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

b) $\psi(x,t)$, $|\psi(x,t)|^2$

$$\psi(x,t) = \underset{N}{\gamma}\left(2\psi_2(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \pm 2i\psi_1(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\right)$$

$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ →

$$= \frac{2}{\sqrt{8}}\, e^{-i\omega t/2}\left(\psi_2(x)\,e^{-2i\omega t} \pm i\psi_1(x)\,e^{-i\omega t}\right)$$

hier $\psi_n(x) \in \mathbb{R}$ ↓

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2}\Big[|\psi_2(x)|^2 + |\psi_1(x)|^2 + \psi_1(x)\psi_2(x)\ \times \left(\mp i\, e^{-2i\omega t} e^{+i\omega t} \pm i\, e^{+2i\omega t} e^{-i\omega t}\right)\Big]$$

↑ Wahrscheinlichkeits-verteilung

$$= \frac{1}{2}\left(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2 + \psi_1\psi_2\, i \underbrace{\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)}_{2i\sin(\omega t)}(-1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \mp 2\psi_1\psi_2 \sin(\omega t)\right)$$

c) $\langle x\rangle(t)$, $\langle p\rangle(t)$, $\langle \underset{x^2}{p^2}\rangle(t)$ $\qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a+a^\dagger)$ $\qquad p = \frac{p_0}{\sqrt{2}\,i}(a-a^\dagger)$ $\qquad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$

$$\underset{p}{\langle x\rangle}(t) = \frac{\overset{p_0/i}{x_0}}{2\sqrt{2}}\int dx\left(\psi_2^*\, e^{\frac{5}{2}i\omega t} \mp i\psi_1^*\, e^{\frac{3}{2}i\omega t}\right)\cdot$$

$$(a \pm a^\dagger)\quad\cdot$$

$$\left(\psi_2\, e^{-\frac{5}{2}i\omega t} \pm i\psi_1\, e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\right)$$

$$= \frac{\overset{p_0/i}{x_0}}{2\sqrt{2}} \int dx \left(\psi_2^* e^{\frac{5}{2}i\omega t} \mp i \psi_1^* e^{\frac{3}{2}i\omega t}\right) \cdot$$

$$\sqrt{2} \cdot \left(\psi_1 e^{-\frac{5}{2}i\omega t} \pm (-1) i \psi_2 e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\right)$$

$$= \frac{\overset{p_0/i}{x_0}}{2} \int dx \left(\mp |\psi_1|^2 i e^{-i\omega t} \pm (-1) |\psi_2|^2 i e^{+i\omega t}\right)$$

$$= \frac{\overset{p_0/i}{x_0}}{2} i \left(\mp e^{-i\omega t} \pm (-1) e^{i\omega t}\right)$$

$$\boxed{\langle x\rangle(t)} = \frac{x_0}{2} i (\pm 1) \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = \boxed{\mp x_0 \sin(\omega t)}$$

$$\boxed{\langle p\rangle(t)} = \frac{p_0}{2} (\mp 1) \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \boxed{\mp p_0 \cos(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle p\rangle(t) = m \cdot \frac{d}{dt} \langle x\rangle(t)}$$

klassische Bew.-GL erfüllt ✓

$$p^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2} \left(a^2 - a^\dagger a - \underbrace{a a^\dagger}_{1 + a^\dagger a} + (a^\dagger)^2\right) \qquad [a, a^\dagger] = 1$$

$$= -\frac{\hbar m\omega}{2} \left(a^2 - 2a^\dagger a + (a^\dagger)^2 - 1\right)$$

$$\boxed{\langle p^2\rangle(t)} = -\frac{\hbar m\omega}{4} \int dx \left(\psi_2^* e^{\frac{5}{2}i\omega t} \mp i \psi_1^* e^{\frac{3}{2}i\omega t}\right) \cdot$$

$\langle x^2\rangle$ $\quad$ $-\frac{\hbar}{4m\omega}$

$$\left(\cancel{a^2} \mp 2a^\dagger a + \cancel{(a^\dagger)^2} \mp 1\right) \cdot$$

$$\left(\psi_2 e^{-\frac{5}{2}i\omega t} \pm \psi_1 e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\right)$$

$$= -\frac{\hbar m\omega}{4} (-6 - 2) = \boxed{2 \hbar m \omega}$$

$2 \hbar / m\omega$

d) Energiemessung

$$\psi(x,t) = \frac{2}{\sqrt{8}} e^{-i\omega t/2} \left(\psi_2(x) e^{-2i\omega t} \pm i \psi_1(x) e^{-i\omega t}\right)$$

daher: mögliche Messwerte $\boxed{E_2 = \hbar\omega \frac{5}{2}}$, $\boxed{E_1 = \hbar\omega \frac{3}{2}}$

mit Wahrscheinlichkeiten $|\langle\psi_2|\psi(t)\rangle|^2$, $|\langle\psi_1|\psi(t)\rangle|^2$

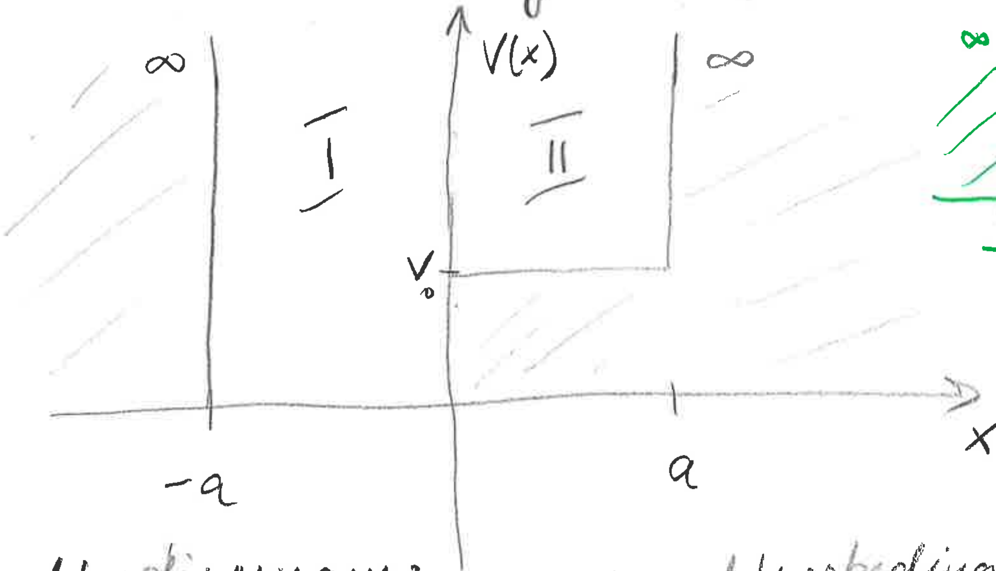
p_2 $\quad$ p_1

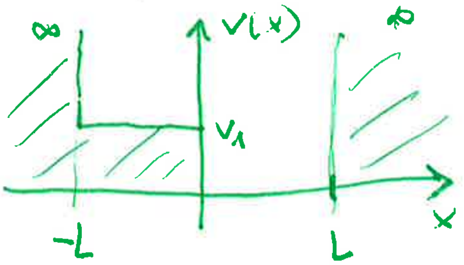
$$\boxed{P_1 = |\langle\psi_1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} = P_2}$$

$$\boxed{\langle H\rangle = \sum_{i=1,2} p_i E_i = \hbar\omega \frac{5+3}{4} = 2\hbar\omega}$$

$\boxed{T\ 1}$ Musterlösung Aufgabe A3 /B$_1$

a)





Randbedingungen:

(1) $\Psi_{\underline{I}}(-a) = 0$

(2) $\Psi_{\underline{II}}(a) = 0$

Anschlussbeding.:

(3) $\Psi_{\underline{I}}(0) = \Psi_{\underline{II}}(0)$

(4) $\Psi'_{\underline{I}}(0) = \Psi'_{\underline{II}}(0)$

in B:
$a \Leftrightarrow L$

b) Ansatz:

$$\Psi_{\underline{I}}(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

$$\Psi_{\underline{II}}(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$

mit $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$; $E > V_0$

in B: $k_1 = \sqrt{\frac{2m(E-V_1)}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ und $E > V_1$

c) aus (1): $Ae^{-ik_1a} + Be^{ik_1a} = 0$

$B = -A e^{-2ik_1a}$ (*)

in B:
$a \Leftrightarrow L$

aus (2): $Ce^{ik_2a} + De^{-ik_2a} = 0$

$D = -Ce^{2ik_2a}$ (**)

aus (3) $A + B = C + D$

aus (4) $ik_1 A - ik_1 B = ik_2 C - ik_2 D$

(*) und (**) einsetzen:

$$(5) \quad A\left(1 - e^{-2ik_1 a}\right) = C\left(1 - e^{2ik_2 a}\right)$$

$$(6) \quad ik_1 A\left(1 + e^{-2ik_1 a}\right) = ik_2 C\left(1 + e^{2ik_2 a}\right)$$

in B: $a \leftrightarrow L$

(5) durch (6) dividieren:

$$\frac{\left(1 - e^{-2ik_1 a}\right)}{ik_1\left(1 + e^{-2ik_1 a}\right)} = \frac{\left(1 - e^{2ik_2 a}\right)}{ik_2\left(1 + e^{2ik_2 a}\right)}$$

$$(7) \quad \frac{1}{k_1} \tan(k_1 a) = -\frac{1}{k_2} \tan(k_2 a)$$

in B: $a \leftrightarrow L$

diese Bedingung ist die gesuchte implizite Gleichung für Energie, umgeschrieben:

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2mE}\, a}{\hbar}\right) = -\sqrt{\frac{E}{E - V_0}} \tan\left(\frac{\sqrt{2m(E - V_0)}\, a}{\hbar}\right)$$

Aus (5) $$C = A \frac{\left(1 - e^{-2ik_1 a}\right)}{\left(1 - e^{2ik_2 a}\right)}$$

in B: $$\tan\left(\frac{\sqrt{2m(E - V_1)}\, L}{\hbar}\right) = -\sqrt{\frac{E - V_1}{E}} \tan\left(\frac{\sqrt{2mE}\, L}{\hbar}\right)$$

Lösung:

in B $a \leftrightarrow L$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < -a \\ A\left(e^{ik_1x} - e^{-2ik_1a}e^{-ik_1x}\right), & -a \leq x \leq 0 \\ A\dfrac{(1-e^{-2ik_1a})}{(1-e^{2ik_2a})}\left(e^{ik_2x} - e^{2ik_2a}e^{-ik_2x}\right), & 0 < x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

d) Für $0 < E < V_0$

ändert sich die Lösung für Bereich $\underline{II}$ weil:

$$k_2 = i\varkappa = i\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

$$\psi_{\underline{II}} = Ce^{-\varkappa x} + De^{\varkappa x}$$

und auch Gleichung (7) wird:

$$\frac{1}{k_1}\tan(k_1a) = -\frac{1}{i\varkappa}\tan(i\varkappa a) =$$

$$= -\frac{1}{\varkappa}\tanh(\varkappa a)$$

in $\underline{B}$, für $0 < E < V_1$:

die Lösung ändert sich für Bereich $\underline{I}$

weil: $k_1 = i\varkappa = i\dfrac{\sqrt{2m(V_1-E)}}{\hbar}$

$$\psi_{\underline{I}} = Ae^{-\varkappa x} + Be^{\varkappa x}$$

und. Gl. (7) wird $\dfrac{1}{\varkappa}\tanh(\varkappa a) = -\dfrac{1}{k_2}\tan(k_2a)$