
2. Plenum zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2021/2022

Plenum: Donnerstag, 2.12.2021.

Rotator im Magnetfeld

Wir betrachten einen quantenmechanischen Rotator in einem Magnetfeld, welcher durch den Hamilton-Operator

$$H = \frac{L^2}{2I} + \mu B L_z \quad (1)$$

beschrieben sei. Dabei ist L^2 der Drehimpulsquadratoperator und L_z der Operator des Drehimpulses in z -Richtung. I ist das Trägheitsmoment, μ der gyromagnetische Faktor und B das Magnetfeld in z -Richtung; letztere drei sind als bekannt angenommene positive, reelle Zahlen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ betrachten wir die beiden Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 :

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \left[\frac{xy}{r^2} \left(1 - \sqrt{7} \frac{z}{r} \right) \right] \quad (2)$$

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{35}{\pi}} \left[\frac{x}{r} \left(\frac{x^2}{8r^2} - \frac{3y^2}{8r^2} - \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{yz}{r^2} \right) \right] \quad (3)$$

- a) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung von ψ_1 und ψ_2 .

Hinweis: Finden Sie zuerst die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Hamilton-Operators H . Danach schreiben Sie ψ_1 und ψ_2 als lineare Kombination von Kugelflächefunktionen \mathcal{Y}_{lm} . Kugelflächefunktionen mit $l = 1$ lassen sich durch lineare Kombinationen von $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ und $\frac{z}{r}$ schreiben; die mit $l = 2$ durch $\frac{xy}{r^2}$, $\frac{x^2 - y^2}{r^2}$, usw. – das sind sogenannte 'cubic harmonics', die man in der Festkörperphysik oft benutzt, weil sich die Rotationssymmetrie auf die Kristallsymmetrie (oft cubic) reduziert.

- b) Zeigen Sie, dass es für genau eine der beiden Wellenfunktionen zu Rekurrenz kommt, die Wellenfunktion sich also, bis auf einen globalen Phasenfaktor $e^{i\alpha}$, zeitlich wiederholt. Für welche der beiden Wellenfunktionen? Wieso?
- c) Berechnen Sie die möglichen Messwerte, sowie die Wahrscheinlichkeiten einer Messung von L^2 zu einem Zeitpunkt $t > 0$.
- d) Berechnen Sie die möglichen Messwerte, sowie die Wahrscheinlichkeiten, wenn stattdessen eine Messung von L_z zum Zeitpunkt $t > 0$ vorgenommen wird.