

---

## 2. Übung zur Quantenmechanik I

---

Wintersemester 2021/2022

**TUTORIUM: Freitag, 22.10.2021.**

### 4. Eingesperrtes Teilchen

2+1=3 Punkte

In der Vorlesung haben Sie die Beschreibung eines freien Teilchens als ebene Welle bzw. Superposition mehrerer ebenen Wellen in Form einer Wellenfunktion kennen gelernt. Beschränkt man den Raum, in welchem sich das Teilchen frei bewegen kann, so ergeben sich Randbedingungen, die die Menge der gültigen Wellenfunktionen einschränken und oft (bei gebundenen Zuständen) das mögliche Energiespektrum quantisieren.

Betrachten Sie ein "freies" Teilchen, das sich in einer Dimension bewegen kann, und in einer Box der Länge  $L$  eingesperrt ist, d.h. es gilt  $\psi(x) = 0$  außerhalb der Box. Dies kann man durch eine (stationäre) Schrödingergleichung mit unendlich großem Potential mathematisch beschreiben:

$$H\psi(x) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Wie lauten die (normierten) Eigenfunktionen  $\psi_n(x)$  und die zugehörigen Eigenenergien  $E_n$ ? Lösen Sie hierfür die Schrödingergleichung dieses Problems unter den oben aufgestellten Randbedingungen.
- b) Wie sieht die Zeitentwicklung  $\Psi_n(x, t)$  für die Eigenfunktionen  $\psi_n(x)$  des obigen Problems? Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei durch eine Superposition der ersten zwei Zustände (Grundzustand und erstem angeregten Zustand)

$$\Phi(x, t = 0) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x) - i\psi_2(x))$$

gegeben. Wie sieht die Zeitentwicklung des angegebenen Zustands  $\Phi(x, t)$  aus?

### 5. Streuung an Potentialbarriere

2+1=3 Punkte

Ein von links kommendes freies Teilchen (ebene Welle) streut an eine Potentialbarriere. Die zugehörige Schrödingergleichung für das stationäre Problem ist die Gleichung (1) mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -\frac{L}{2} \\ V_0 & \text{für } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}, V_0 \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{für } x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für die Streuung eines Teilchens mit Energie  $0 < E < V_0$  an der Potentialbarriere. Welche Relation erfüllen Reflexions- und Transmissionskoeffizient miteinander?
- b) Zeigen Sie, dass man den Transmissionskoeffizienten des obigen Streuproblems auf folgende Form bringen kann:

$$T = \frac{4\kappa^2}{k^2} \frac{1}{\sinh^2(\kappa L) \left(1 - \frac{\kappa^2}{k^2}\right)^2 + 4 \cosh^2(\kappa L) \frac{\kappa^2}{k^2}} \quad (2)$$

mit

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \quad \text{und} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

## 6. Gebundene Zustände in einem $\delta$ -Potential

*2+1+1=4 Punkte*

Das Potential, das Nukleonen aufgrund der schwachen Wechselwirkung im Atomkern spüren, lässt sich in grober Näherung als Deltapotential (extrem kurzreichweitige Wechselwirkung) schreiben. Die zugehörige stationäre Schrödingergleichung für dieses Problem lautet

$$H\psi(x) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta(x) \right) \psi(x) = E\psi(x)$$

- a) Überlegen Sie, wie die Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion  $\psi(x)$  an der Stelle der  $\delta$ -Distribution aussehen. Integrieren Sie dazu z.B. die Schrödingergleichung in einem kleinen Bereich  $(-\epsilon, +\epsilon)$  um die Position der Distribution.
- b) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für  $\alpha < 0$  und  $E < 0$ .
- c) Zeigen Sie, dass das System nur einen gebundenen Zustand erlaubt. Bestimmen Sie Zeitentwicklung seiner Eigenfunktion und interpretieren Sie selbige.