Technische Universität
Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi
Dr. A. Kauch, Priv.-Doz. J. Tomczak

4. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2021/2022

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 5.11.2021.

10. Translationsoperator

2+1+1=4 Punkte

Gegeben sei der Operator $T = e^{-\lambda(a-a^\dagger)}$, wobei a und $a^\dagger$ Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren sind. Die Exponentialfunktion eines Operators ist hierbei durch die entsprechende Reihenentwicklung definiert.

a) Ist der Operator T hermitesch? Ist T unitär, d.h. gilt $TT^\dagger = T^\dagger T = 1$?
Transformieren Sie nun die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit T, d.h. bestimmen Sie $\widetilde{a} = TaT^\dagger$ und $\widetilde{a}^\dagger = Ta^\dagger T^\dagger$.

b) Berechnen Sie daraus nun den transformierten Hamiltonoperator $\widetilde{H} = TH_0T^\dagger$, wobei H_0 der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators ist. Für welches λ ergibt sich der Hamiltonoperator aus Aufgabe 9(a)?

c) Drücken Sie nun die Erzeuger und Vernichter im Exponenten von T durch den Impulsoperator aus. Für welches ξ finden Sie $T = \exp(-\frac{i}{\hbar}\xi p)$? Was ergibt sich, wenn man den Operator T auf eine Wellenfunktion in Ortsdarstellung anwendet: $T\psi(x)$? Warum nennt man T auch den Translationsoperator? Bringen Sie dieses Ergebnis in Verbindung mit Aufgabe 9(b).

Hinweis: Verschwinden für zwei Operatoren A, B die Kommutatoren $[A,C]$ und $[B,C]$ wobei $C = [A,B]$, so gelten die folgenden Identitäten:

$$[A, F(B)] = [A,B]F'(B) \tag{1}$$

$$e^A e^B = e^{A+B}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{2}$$

wobei $F'(B) = \frac{d}{dB}F(B)$ ist.

11. Kohärente Zustände

1+1+1=3 Punkte

In der Vorlesung haben Sie die – als kohärente Zustände bekannten – Eigenfunktionen $\varphi_\alpha(x)$ des Vernichtungsoperators a im Kontext des harmonischen Oszillators kennen gelernt: $a\varphi_\alpha(x) = \alpha\varphi_\alpha(x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass kohärente Zustände nicht orthogonal zueinander sind, d.h. bestimmen Sie das Skalarprodukt $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenzustände des harmonischen Oszillators ψ_n orthogonal zueinander sind, d.h. bestimmen Sie (ψ_n, ψ_m)
Hinweis: Benutzen Sie, dass $\psi_n \sim (a^\dagger)^n\psi_0$

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte für die Varianz $\Delta x = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ für kohärente Zustände φ_α und für Eigenzustände des Harmonischen Oszillators ψ_n.

12. Zweidimensionaler Potenzialtopf

1+1+1=3 Punkte

Betrachten Sie einen zweidimensionalen Potentialtopf mit dem Potential

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Finden Sie die Eigenzustände der stationären Schrödingergleichung für dieses Problem sowie die dazugehörigen Eigenenergien. Ist der Grundzustand entartet? Sind der erste und der zweite angeregte Zustand entartet? Wie häufig?

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Zustand

$$\psi(x,y,t=0) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) & 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A und die Zeitentwicklung des Zustandes, also $\psi(x,y,t)$.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle y(t) \rangle$, $\langle p_x(t) \rangle$ für den obigen Zustand $\psi(x,y,t)$.