Technische Universität
Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi
Dr. A. Kauch, Priv.-Doz. J. Tomczak

6. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2021/2022

TUTORIUM: Freitag, 26.11.2021.

15. Messung von Drehimpulsen

0.5+0.5+1+1+1+1=5 Punkte

Im Vorgriff auf das Kapitel zum quantenmechanischen Drehimpuls, betrachten wir die folgenden Operatoren L_i, $i \in \{x, y, z\}$, in ihrer Matrixdarstellung

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; L_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \text{-i} & 0 \\ \text{i} & 0 & \text{-i} \\ 0 & \text{i} & 0 \end{bmatrix}, \; L_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{-1} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

a) Was sind die möglichen Ergebnisse l_z einer Messung von L_z an einem beliebigen Zustand?

b) Das System sei im Zustand $|l_z = 1\rangle$. Was sind dann die Erwartungswerte $\langle L_x \rangle$ und $\langle L_x^2 \rangle$?

c) Wie lauten die Eigenwerte und normierten Eigenzustände von L_x in der Eigenbasis von L_z?

d) Ein Teilchen sei in einem Zustand mit $l_z = -1$. Sodann wird L_x gemessen. Was sind die möglichen Messwerte und ihre Wahrscheinlichkeiten?

Das System sei präpariert in folgendem Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |l_z = -1\rangle + \frac{1}{2} |l_z = 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |l_z = +1\rangle \tag{2}$$

e) Es wird nun L_z^2 gemessen und das Ergebnis sei $+1$. (i) Wie wahrscheinlich war dieses Resultat und in welchem Zustand befindet sich das System nach einer idealen Messung von L_z^2? (ii) Es werde nun sofort auch L_z gemessen. Was sind die möglichen Ergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten?

Wir nehmen nun an, das System sei durch den Hamilton-Operator $H = -\mu L_z$ beschrieben.

f) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Eigenzustand $|l_x = 1\rangle$ des Operators L_x. Was sind die möglichen Resultate sowie ihre Wahrscheinlichkeiten bei einer Messung von L_x zum Zeitpunkt $t > 0$?

16. Hundsche Kopplung *2+1+2=5 Punkte*

Wir betrachten ein System aus zwei Elektronen in zwei Orbitalen eines Atoms in einem Kristallfeld (siehe Tutorium 1, Aufgabe 3). Die Energien der Orbitalen seien entartet (haben den gleichen Wert). Die Elektronen beschreiben wir durch zwei wechselwirkende Spins. Jeder der beiden Spins kann die Werte $\pm\hbar/2$ annehmen. Wir betrachten die Basis

$$\{\ |\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle,\ |\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle,\ |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle,\ |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\ \},$$

wobei $|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle$ den Zustand beschreibt, in dem das Teilchen in Orbital 1 in positive z-Richtung polarisiert ist und jenes in Orbital 2 in negative z-Richtung usw. Der Hamilton-Operator dieses Systems sei gegeben durch

$$H = -J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = -J\left((S_x)_1 \otimes (S_x)_2 + (S_y)_1 \otimes (S_y)_2 + (S_z)_1 \otimes (S_z)_2\right).$$

gegeben, wobei $(...)_{1(2)}$ die Wirkung auf das Teilchen in Orbital 1 (2) beschreibt. Die Spin-Operatoren für das jeweilige Orbital lauten

$$S_x = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|), \quad S_y = \frac{\hbar}{2}(-i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|), \quad S_z = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|).$$

a) Bestimmen Sie die Hamilton-Matrix in der obigen Basis. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der 3. Aufgabe, 1. Übungsblatt. Sie haben die Eigenwerte E_n und Eigenzustände $|\psi_n\rangle$ dieses Systems als Funktion von J schon damals gefunden. Jetzt betrachten wir das Ergebnis in Abhängigkeit von J. Im Fall $J > 0$ (und $J < 0$): was ist der Grundzustand? Ist er entartet?

Wir nennen: $S_{z,1} \equiv (S_z)_1 \otimes (\mathbb{1})_2$ und $S_{z,2} \equiv (\mathbb{1})_1 \otimes (S_z)_2$. Diese Notation bedeutet, $S_{z,\alpha}$ wirkt nur auf das Teilchen in Orbital α.

b) Zeigen Sie, dass H und die z-Komponente des Gesamtspins $S_z = S_{z,1} + S_{z,2}$ ein vollständiges System kommutierender Observablen bildet.

c) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Produkt-Zustand der Form $|\phi\rangle = |\phi_1\rangle|\phi_2\rangle$, die Korrelationsfunktion

$$C(S_{z,1}, S_{z,2}) \equiv \langle S_{z,1}S_{z,2}\rangle - \langle S_{z,1}\rangle\langle S_{z,2}\rangle$$

verschwindet, d.h. $|\phi\rangle$ ist in den Unterräumen 1,2 unkorreliert. Berechnen Sie den Wert von $C(S_{z,1}, S_{z,2})$ für den Grundzustand für $J < 0$ und zeigen Sie damit, dass sich dieser nicht als Produkt schreiben lässt.