Technische Universität
Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi
Dr. A. Kauch, Priv.-Doz. J. Tomczak

7. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2021/2022

TUTORIUM: Freitag, 3.12.2021.

17. Vollst. Satz kommutierender Observablen

1+1+1=3 Punkte

Wir betrachten ein Drei-Niveau System. Sein Hamilton Operator H sei gegeben durch

$$H = \hbar\Omega \left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| - |3\rangle\langle 3| \right) \tag{1}$$

wobei $\{|i\rangle, i = 1, 2, 3\}$ eine normierte Basis ist und $\Omega > 0$. Ein weiterer Operator sei

$$O = \alpha \left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2| \right) \tag{2}$$

wobei $\alpha > 0$.

a) Zeigen Sie, dass H und O hermitesch sind und miteinander kommutieren.

b) Geben Sie explizit eine gemeinsame Basis der Eigenvektoren von H und O an.

c) Welche der folgenden Mengen an Operatoren bilden einen vollständigen Satz kommutierender Observablen? (i) $\{H\}$, (ii) $\{O\}$, (iii) $\{H, O\}$, (iv) $\{H^2, O\}$

18. Scharfe Messung

1 Punkte

a) An einem System im Zustand $|\psi\rangle$ wird die Observable A mit der Unschärfe $\Delta A = 0$ gemessen. Beweisen Sie, dass $|\psi\rangle$ dann notwendigerweise ein Eigenzustand $|a\rangle$ von A sein muss.

19. Drehimpuls im 2D harmonischen Oszillator *1+1+2+2=6 Punkte*

Gegeben sei der quantenmechanische harmonische Oszillator in zwei Dimensionen

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) \tag{3}$$

der sich alternativ durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_x^\dagger$, a_x bzw. $a_y^\dagger$, a_y ausdrücken lässt. Mit letzteren definieren wir die folgenden Linearkombinationen:

$$a_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y), \qquad a_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y) \tag{4}$$

sowie die ensprechenden Besetzungsoperatoren

$$N_L = a_L^\dagger a_L, \qquad N_R = a_R^\dagger a_R. \tag{5}$$

a) Drücken Sie, für $\omega_x = \omega_y = \omega$, den Hamilton Operator H sowie die z-Komponente des Drehimpulsoperators $L_z = xp_y - yp_x$ durch die Operatoren N_L und N_R aus.

b) Welche der folgenden Mengen bilden einen vollständigen Satz kommutierender Observablen des Systems: $\{N_L\}$, $\{n_x, n_y\}$, $\{N_L, N_R\}$, $\{H\}$? Ändert sich Ihre Antwort im Falle $\omega_x \neq \omega_y$?

Von nun an sei $\omega_x = \omega_y = \omega$.

c) Zeigen Sie, dass $\{H, L_z\}$ ein vollständiges System kommutierender Obervablen bilden: (i) Zeigen Sie, dass $[H, L_z] = 0$; (ii) Zu welchen Eigenwerten $\hbar\omega(n+1)$ bzw. $\hbar m$ ist $|n_R, n_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_R! n_L!}}(a_R^\dagger)^{n_R}(a_L^\dagger)^{n_L}|0\rangle$ Eigenzustand der Operatoren H und L_z? Ist die Zuordnung $(n_R, n_L) \to (n, m)$ eindeutig? Welche Werte kann m für ein gegebenes n annehmen?

Wir definieren die folgenden drei Operatoren

$$J_z = \alpha L_z, \qquad J_+ = \beta\hbar a_R^\dagger a_L, \qquad J_- = \beta\hbar a_L^\dagger a_R \tag{6}$$

wobei α, β reelle Konstanten sind.

d) Bestimmen Sie α und β derart, dass $\mathbf{J}$ ein quantenmechanischer Drehimpulse ist. Der zweidimensionale harmonische Oszillator beherbergt also eine dreidimensionale Algebra!