Technische Universität
Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi
Dr. A. Kauch, Priv.-Doz. J. Tomczak

10. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2021/2022

TUTORIUM: Freitag, 14.01.2022

24. Drehungen im Spin-Raum

1+2+1=4 Punkte

Betrachten Sie den Rotationsoperator $\hat{R}_\alpha(\theta)$ im Spin-1/2 Raum , der eine Drehung des Spins um die α-Achse ($\alpha = x, y, z$) mit dem Drehwinkel θ beschreibt: $\hat{R}_\alpha(\theta) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_\alpha)$

a) Berechnen Sie explizit die Wirkung dieses Operators auf den Zustand $|\uparrow\rangle$ für eine Drehung mit dem Winkel $\theta = \pi/2$ um die y-Achse.

b) Wir betrachten jetzt zwei Drehungen nacheinander, zuerst um die y-Achse, danach um die x-Achse, beide mit einem Winkel $\pi/2$. Berechnen Sie die Wirkung dieser Drehungen auf den Zustand $|\uparrow\rangle$, also $\hat{R}_x(\theta)\hat{R}_y(\theta)|\uparrow\rangle$. Was bekommen Sie, wenn Sie die Ordnung der Drehungen ändern, also $\hat{R}_y(\theta)\hat{R}_x(\theta)|\uparrow\rangle$ berechnen? Kommutieren die Drehungen miteinander?

c) Betrachten Sie jetzt den Eigenzustand des $\hat{S}_x$ Operators zum Eigenwert $\hbar/2$. Benutzen Sie explizit den Rotationsoperator, um eine Drehung um z-Achse mit dem Drehwinkel $\theta = \pi/2$ auf diesen Zustand anzuwenden. Danach wird an dem gedrehten Zustand $\hat{S}_y$ gemessen. Bestimmen Sie mögliche Messergebnisse und deren Wahrscheinlichkeiten. Was können Sie über den gedrehten Zustand sagen?

25. Zeeman Splitting

2+2=4 Punkte

Sie haben in der Vorlesung gelernt, wie man Eigenfunktionen ψ_{nlm} des Wasserstoffatoms im Ortsraum bekommt und was die dazugehörigen Eigenenergien und deren Entartungen sind. Wir haben auch in Spin-Raum viel geübt. Jetzt sammeln wir die zwei Teile der Elektron-Wellenfunktion zusammen und bilden folgende Produktzustände: $|\psi_{nlm}\rangle \otimes |s, m_s\rangle$, die eine Basis in Hilbertraum $\mathcal{H}_\mathcal{R} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{S}$ bilden. Der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms H (ohne Spin-Bahn Kopplung) ist diagonal in Spin-Raum und $\{H, L^2, L_z, S^2, S_z\}$ ist ein vollständiger Satz kommutierender Observablen. Daher sind die obigen Produktzustände die Eigenbasis des Hamilton-Operators in dem Produkthilbertraum. Da Elektronen einen Spin $s = 1/2$ haben, werden wir die Notation vereinfachen und die Basiszustände mit $|\psi_{nlm}\rangle|m_s\rangle \equiv |\psi_{nlm}\rangle \otimes |s, m_s\rangle$ beschreiben.

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, an welches ein Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ angelegt wird. Durch die Wechselwirkung von magnetischem Moment und Magnetfeld kommt es zu einem zusätzlichen Term im Hamilton-Operator:

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{B} \cdot \left(\vec{L} + 2\vec{S}\right). \tag{1}$$

Dabei ist μ_B das Bohrsche Magneton, $\vec{L}$ der Bahndrehimpuls und $\vec{S}$ der Spin des Elektrons.

a) Berechnen Sie die Energie-Eigenzustände, sowie die Eigenenergien des entstehenden Systems. Bestimmen Sie die Entartung für $n = 1$ und $n = 2$ im Falle schwacher Magnetfelder ($|B_z|$ klein).

b) Wir betrachten einen Zustand $|\psi_0\rangle$ zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{4}|\psi_{4,2,-2}\rangle|\downarrow\rangle + \frac{\sqrt{7}}{4}|\psi_{3,1,0}\rangle|\uparrow\rangle - \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}|\psi_{3,2,0}\rangle\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) + i\frac{\sqrt{3}}{4}|\psi_{1,0,0}\rangle|\downarrow\rangle \tag{2}$$

wo $\psi_{n,l,m}$ die Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms zu den Quantenzahlen n (Hauptquantenzahl), l (Drehimpulsquantenzahl) und m (Magnetquantenzahl) sind. $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ bezeichnen jeweils Spinquantenzahl $m_s = 1/2$ und $m_s = -1/2$. Bestimmen Sie für folgende Operatoren die möglichen Messwerte, jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, sowie die assoziierten kollabierten Wellenfunktionen: H, L_z, L^2, S_z, H_B. Beachten Sie, dass es sich bei H um den vollständigen Hamiltonoperator des Systems (inklusive H_B) handelt.

26. Das Helium-Atom

2+2 +2* =2+4* Punkte*

Wir untersuchen zunächst die Schrödingergleichung für ein einzelnes Elektron um einen Helium-Kern.

a) Geben Sie die Energie-Eigenbasis für ein Elektron mit Spin 1/2 an, welches an einen Helium-Kern gebunden ist. Gehen Sie dazu davon aus, dass der Kern eine unendliche Masse und Elementarladung +2 hat. Wie ändern sich die Eigenfunktionen und Energien gegenüber dem Wasserstoffatom?

Weiter betrachten wir einen Helium-Kern, in dessen Nähe sich zwei Elektronen aufhalten, welche allerdings nicht miteinander wechselwirken. Quantenmechanische, ununterscheidbare Teilchen haben Vertauschungssymmetrien, die zu einigen der seltsamsten Phänomenen der Physik führen. Speziell bleibt Physik unter Vertauschung zweier ununterscheidbarer Teilchen gleich. Zum einen gibt es Bosonen, bei denen sich die Wellenfunktion unter Vertauschung zweier Teilchen nicht ändert, zum anderen Fermionen, bei denen eine Vertauschung einen Faktor -1 generiert.

b) (Bonuspunkte) Betrachten Sie eine direkte Produktbasis für 2-Teilchen-Zustände, welche aus zwei diskreten (für den Moment endlichen, zB. Dimension = 3) 1-Teilchen-Basen gebildet wird. Zeigen Sie, dass der Raum der Zweiteilchenzustände als direkte Summe eines bosonischen und eines fermionischen Raumes gebildet werden kann. Welcher der beiden Räume ist größer (hat eine höhere Dimension)? Wenn Sie möchten, überlegen Sie sich, ob für $n > 2$ Teilchen die Produktbasis immer noch als direkte Summe einer bosonischen und einer fermionischen Basis geschrieben werden kann. Überlegen Sie außerdem, wie sich das Pauli-Prinzip (Verbot zweier Fermionen im selben Zustand) aus der Antisymmetrie der Wellenfunktion ableiten lässt.

c) (Bonuspunkte) Berechnen Sie nun die Energieeigenwerte für zwei Elektronen sowie die Entartungen für den Grundzustand, den ersten angeregten Zustand und den zweiten angeregten Zustand des nicht-wechselwirkenden Helium Atoms. Beachten Sie, dass Elektronen Fermionen mit Spin 1/2 sind. Wie würden sich die Ergebnisse ändern, wenn Sie stattdessen von fiktiven, bosonischen Spin 0-Elektronen ausgingen?

Hinweis: Das Zählen von Mehrteilchenzuständen im fermionischen wie im bosonischen Fall sollte reduzierbar sein auf das Zählen von Teilchen pro Zustand, es gibt keine Unterscheidung "welches Teilchen wo" ist. Welche Besetzungen für Zustände erlaubt sind, wird vom Charakter (bosonisch oder fermionisch) der Teilchen bestimmt.

Frohe Weihnachten und ein schönes neues Jahr!