Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi
Dr. A. Kauch, Priv.-Doz. J. Tomczak

11. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2021/2022

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 21.01.2022.

27. Anharmonischer Oszillator

3+1=4 Punkte

Wir betrachten ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m in einem Potential

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda W(x) \tag{1}$$

wobei wir annehmen, dass der Parameter $\lambda > 0$ klein genug ist, damit der zweite Term in Störungstheorie behandelt werden kann. Es handelt sich effektiv also um einen gestörten harmonischen Oszillator.

a) Es sei $W(x) = -\mu x^3$. Berechnen Sie die Energiekorrekturen zu den Referenzenergien $E_n^{(0)}$ des harmonischen Oszillators bis zur 2. Ordnung in λ. Entscheiden Sie dabei, welche Störungstheorie (entartet, nicht-entartet) Sie verwenden sollten. Diskutieren Sie, wann die Störungslösung sinnvoll ist. Benutzen Sie dazu z.B. das Kriterium, dass die Korrektur $E_n^{(2)}$ klein sein sollte gegenüber den ungestörten Energiedifferenzen $|E_{n\pm1}^{(0)} - E_n^{(0)}|$.

b) Es sei nun $W(x) = \frac{x^k}{k!}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Korrektur der Grundzustandsenergie für beliebiges k. Machen Sie sich intuitiv klar, warum die Korrektur (soweit vorhanden) mit größer werdendem k kleiner wird.

28. Exakte vs. störungstheoretische Lösung

1+1+2+2=6 Punkte

Hier betrachten wir den zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit einem Störterm:
$H = H_0 + \lambda V$, wobei

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2), \qquad \lambda V = \lambda m\omega^2 xy \tag{2}$$

a) Drücken Sie den ungestörten Hamilton-Operator H_0 durch die Erzeuger und Vernichter $a_x^\dagger$, a_x und $a_y^\dagger$, a_y der Oszillatorquanten in x- und y-Richtung aus. Was sind die zwei niedrigsten Eigenenergien, ihre Entartung, sowie ihre Eigenfunktionen? *Hinweis:* Es sind keine neuen Herleitungen nötig; Sie können das Skriptum benutzen.

b) Berechnen Sie nun die Korrektur der Grundzustandsenergie bis zur 2. Ordnung Störungstheorie in λ. Welche Störungstheorie verwenden Sie?

c) Berechnen Sie die Energiekorrektur des ersten angeregten Zustands in 1. Ordnung. Warum muss hier die *entartete* Störungstheorie verwendet werden?

d) Wir suchen nun die *exakte* Lösung des Problems: Der V-Term koppelt die Oszillatoren in x- und y-Richtung. Schreiben Sie daher zunächst den Hamilton-Operator H in einer Weise um, dass er die Summe zweier *unabhängiger* Oszillatoren beschreibt. Entkoppeln Sie dazu die Koordinaten durch die Transformation $\tilde{x} = (x + y)/\sqrt{2}$, $\tilde{y} = (x - y)/\sqrt{2}$, und führen Sie dann (z.B. via der Ortsdarstellung) neue konjugierte Impulse $\tilde{p}_x$, $\tilde{p}_y$ ein. Geben Sie schließlich die Eigenwerte von H an. Wie vergleichen sich diese *exakten* Ergebnisse mit den Resultaten aus **b)** und **c)**?