# Aufgabenblatt 10

## 28 Spin Algebra

a) Beweisen Sie durch Nachrechnen: (i) $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$, (ii) $\mathrm{tr}[\sigma_i] = 0$, (iii) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k$.

b) Drücken Sie die Eigenvektoren von $S_y$ durch die Eigenvektoren $|+\rangle, |-\rangle$ von $S_z$ aus.

c) Berechnen Sie die $2 \times 2$ Matrix der Leiteroperatoren $S_+$ und $S_-$.

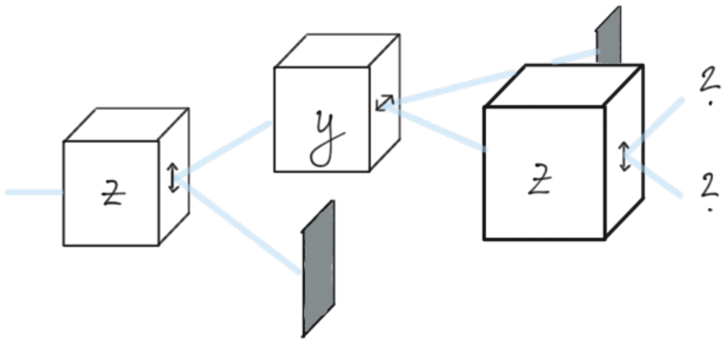
d) Beweisen Sie: $\mathrm{tr}[\rho] = 1$ mit $\rho = (\mathbb{1} + \boldsymbol{n\sigma})/2$ und $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$, $|\boldsymbol{n}| \leq 1$.

1 Kreuz

## 29 Stern-Gerlach-Experiment

Wir betrachten ein Stern-Gerlach-Experiment mit drei hintereinander liegenden Magnetfeldern. Das erste Magnetfeld ist in $z$-, das zweite in $y$-, und das dritte wieder in $z$-Richtung orientiert. Nach dem ersten und zweiten Magnetfeld wird jeweils nur ein Strahl durch das nächste Magnetfeld geleitet. Überlegen Sie, ob sich der Strahl im dritten Magnetfeld erneut aufspaltet. Beschränken Sie sich dabei allein auf den Spinfreiheitsgrad (zweidimensionaler Hilbertraum, keine ortsabhängige Wellenfunktionen).

1 Kreuz




Jede Box stellt eine Stern-Gerlach Apparatur dar.
Die grauen Platten blockieren den Strahl.

## 30 Addition von Spins

Wir betrachten zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Freiheitsgrade (z.B. zweier Elektronen). Die Orthonormalbasis $\{|s_1, m_1, s_2, m_2\rangle \mid s_1 = s_2 = \frac{1}{2},\, m_1, m_2 = \pm\frac{1}{2}\}$ des vierdimensionalen Hilbertraums schreiben wir abgekürzt als

$$|++\rangle = \left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2},\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle\ , \quad |+-\rangle = \left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\ , \tag{1}$$

$$|-+\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle\ , \quad |--\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\ . \tag{2}$$

Hierbei gilt $S_{i,z}|\pm\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\pm\rangle$ und $\boldsymbol{S}_i^2|\pm\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\pm\pm\rangle$ , $i = 1, 2$.

a) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle\pm\pm|S_x|\pm\pm\rangle$ und $\langle\pm\pm|S_z|\pm\pm\rangle$, wobei $S_x = S_{1,x} + S_{2,x}$ und $S_z = S_{1,z} + S_{2,z}$ der Gesamtspin in $x$- und $z$-Richtung sind.

b) Drücken Sie den Operator $\boldsymbol{S}^2$ mittels $\boldsymbol{S}_i^2$, $S_{i,z}$ und $S_{i,\pm}$ aus, $i = 1, 2$. Hier ist $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ der Gesamtspin.

c) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle\pm\pm|\boldsymbol{S}^2|\pm\pm\rangle$.

d) Welche Ergebnisse kann eine Messung von $\boldsymbol{S}^2$ liefern? In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung? Gibt es Entartung?

1 Kreuz

## 31 Störungstheorie

Die Schwingung eines zwei-atomigen Moleküls können mit folgendem Potential modelliert werden,

$$V(X) = \frac{1}{2}m\omega^2(X^2 - aX^3)\ , \quad a > 0\ . \tag{3}$$

a) Partitionieren Sie den Hamiltonian in einen lösbaren Anteil und ein Störpotential. Schreiben Sie den Ausdurck für die Korrektur der Eigenenergien in erster Ordnung Rayleigh-Schrödinger Störungstheorie auf.

b) Berechnen Sie die erste Anregungsenergie des Moleküls mit Hilfe der Störungstheorie. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der ersten Anregungsenergie des harmonischen Oszillators.

(a)+(b) = 2 Kreuze