Aufgabenblatt 3

8 Kommutatoren

a) Beweisen Sie folgende Kommutatorregeln für allgemeine lineare Operatoren bzw. $N \times N$ Matrizen A, B, C, der Identität $\mathbb{1}$ und $a, b \in \mathbb{R}$,

$$[A, A] = 0 \tag{1}$$
$$[aA, bB] = ab[A, B] \tag{2}$$
$$[A, B] = -[B, A] \tag{3}$$
$$[A, \mathbb{1}] = [\mathbb{1}, A] = 0 \tag{4}$$
$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C] \tag{5}$$
$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \tag{6}$$
$$0 = [A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] \; . \tag{7}$$

b) Berechnen sie den Kommutator $[R_x, R_z]$ der Rotationsmatrizen

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} , \quad R_z = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Unter welchen Bedingungen gilt $[R_x, R_z] = 0$?

c) Wir betrachten den Ableitungsoperator $\mathcal{O}_1 = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ und den Multiplikationsoperator $\mathcal{O}_2 = x$, welche auf differenzbierbare Funktionen der Gestalt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wirken: $\mathcal{O}_1 f(x) = -\mathrm{i}f'(x)$ und $\mathcal{O}_2 f(x) = xf(x)$. Berechnen sie den Kommutator $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$ indem sie ihn auf eine beliebige differenzierbare Funktion anwenden. Berechnen sie den Kommutatoren $[\mathcal{O}_1^2, \mathcal{O}_2]$ und $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2^2]$ in dem sie die Ergebnisse von a) ausnutzen.

1 Kreuz

9 Eigenvektoren und Eigenwerte hermitescher Operatoren

Wir betrachten die Eigenwertgleichung (zeitunabhängige Schrödingergleichung)

$$H|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle \; , \qquad i = 1, 2, \dots \; , \tag{9}$$

wobei H ein hermitescher Hamiltonoperator mit den diskreten Eigenwerten E_i und Eigenvoktoren $|\psi_i\rangle$ ist. Wir nehmen an, dass die Eigenvektoren normiert sind: $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$.

a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte E_i reell sind.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind: $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = 0$, wenn $E_i \neq E_j$.

c) Der adjungierte Operator $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^\dagger$ ist implizit über

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \phi^*(x) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\dagger \psi(x) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi^*(x) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \phi(x)\right]^* \tag{10}$$

für alle komplexwertigen und stetig differenzierbare Funktionen $\psi(x), \phi(x)$ definiert, wobei wir annehmen, dass diese Funktionen im Unendlichen auf 0 abfallen. Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ nicht hermitesch ist, indem Sie beweisen:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\dagger = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ . \tag{11}$$

1 Kreuz

10 Stabilisierung des Grundzustandes

Wir betrachten den Hamiltonoperator H aus einem 2-dimensionalen Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$,

$$H = A_1|0\rangle\langle 0| + V|0\rangle\langle 1| + V^*|1\rangle\langle 0| + A_2|1\rangle\langle 1|\ , \tag{12}$$

wobei $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, $A_1 < A_2$ und $V \in \mathbb{C}$.

a) Beweisen Sie, dass H hermitesch ist und finden sie den Grundzustand (niedrigster Eigenwert) und den angeregten Zustand (nächst höherer Eigenwert) für den Fall $V = 0$.

b) Zeigen Sie, dass $V \neq 0$ den Grundzustand stabilisiert, d.h. der Betrag der Differenz zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand nimmt mit wachsendem $|V|$ zu.

1 Kreuz

11 Asymmetrischer Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m lebt in einem eindimensionalen asymmetrischen Potentialtopf,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{Fall I:} \quad x \leq 0 \\ -V_0 & \text{Fall II:} \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ 0 & \text{Fall III:} \quad x > x_0 \end{cases} \tag{13}$$

wobei hier $V_0 > 0$ und $x_0 > 0$.

a) Skizzieren Sie das Potential und schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für alle drei Fälle separat auf. Bringen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für jeden Fall in die Form:

$$\psi_i''(x) + \kappa_i^2 \psi_i(x) = 0\ , \quad i = \text{I, II, III}\ , \tag{14}$$

und bestimmen Sie die (i.A.) komplexe Zahl κ_i.

b) Verwenden Sie für II und III den Ansatz

$$\psi_i(x) = A_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x} \ , \quad i = \mathrm{II}, \, \mathrm{III} \tag{15}$$

und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen k_i und κ_i. Welchen Ansatz müssen wir für den Fall I wählen?

c) Welches Kriterium erfüllen gebunden Zustände? Ist k_i ($i = \mathrm{II}, \mathrm{III}$) für gebundene Zustände reell oder imaginär?

d) Zeigen Sie, dass für gebunden Zustände folgende Beziehung zwischen m, x_0 und V_0 gelten muss:

$$\frac{4}{\pi^2} V_0 x_0^2 > \frac{\hbar^2}{2m} \ . \tag{16}$$

D.h. das Potential muss tief und breit genug sein, damit es für gegebenes m überhaupt binden kann. Tipp: Die Ungleichung folgt aus den Stetigkeitsbedingungen zwischen den Bereichen II und III.

(ab)+(cd) = 2 Kreuze