Aufgabenblatt 4

12 Funktionen von Operatoren

a) Beweisen Sie für einen linearen Operator A die Identität,

$$e^{i\alpha A} = \cos(\alpha A) + i\sin(\alpha A) \; , \tag{1}$$

und

$$e^{i\alpha A} = \mathbb{1}\cos(\alpha) + iA\sin(\alpha) \; , \tag{2}$$

für den Spezialfall $A^2 = \mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}$ der Einheitsoperator ist und $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Welche Bedingung muss für den Kommutator $[A, B]$ zweier linearer Operatoren A, B gelten, damit die Gleichung

$$e^A e^B = e^{A+B} \tag{3}$$

gültig ist?

c) Es gelte $[A, B] = c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die Kommutatorrelation

$$[A, B^n] = ncB^{n-1} \; , \qquad n \in \mathbb{N} \; , \quad n \geq 1 \; . \tag{4}$$

d) Es gelte wieder $[A, B] = c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Beweise Sie die Kommutatorrelation

$$[A, f(A, B)] = c\frac{\partial f}{\partial B} \tag{5}$$

für beliebige Polynome

$$f(A, B) = \sum_{n=1}^{N} (a_n A^n + b_n B^n) \tag{6}$$

mithilfe von c).

(ab)+(cd) = 2 Kreuze

13 Statistik von Observablen

Der Erwartungswert $\langle A\rangle_\psi$ und die Standardabweichung ΔA_ψ einer Observable A in einem Zustand $|\psi\rangle$ sind gegeben durch:

$$\langle A\rangle_\psi := \langle\psi|A|\psi\rangle \; , \qquad \Delta A_\psi := \sqrt{\left\langle \; (A - \langle A\rangle_\psi)^2 \; \right\rangle_\psi} \; . \tag{7}$$

a) Zeigen Sie, dass ΔA_ψ auch in folgender Form geschrieben werden kann

$$\Delta A_\psi = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2} \tag{8}$$

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Observable A für den Fall, dass $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von A ist.

c) Leiten Sie die *Unschärferelation* beliebiger Observablen A und B ab,

$$\Delta A_\psi \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle [A, B] \right\rangle_\psi \right| , \tag{9}$$

und betrachten Sie den Fall $A = X$ und $B = P$.

1 Kreuz

14 Der unitäre Zeitentwicklungsoperator

Betrachten Sie die folgende Operator-Differentialgleichung für den *unitären Zeitenwicklungsoperator*,

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H U(t, t_0) , \tag{10}$$

wobei H ein Hamiltonoperator ist, der im Allgemeinen ebenfalls zeitabhängig sein kann.

a) Zeigen Sie, dass

$$U(t, t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} H (t - t_0)} \tag{11}$$

eine Lösung ist, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt. Warum gilt diese einfache Lösung nicht, wenn H zeitabhängig ist?

b) Zeigen Sie, dass $U(t, t_0)$ aus Gleichung (11) ein unitärer Operator ist.

c) Berechnen Sie $U(t, t_0)$ für den Fall eines zeitunabhängigen Hamiltonoperators mit diskretem Eigenwertspektrum,

$$H = \sum_n E_n \, |n\rangle\langle n| . \tag{12}$$

d) Der Zustand eines Quantensystems mit zeitunabhängigem Hamiltonoperator sei zum Zeitpunkt $t = t_0$ durch $|\phi\rangle$ gegeben. Zeigen Sie, dass damit der Zustand für alle Zeiten t durch

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\phi\rangle \tag{13}$$

determiniert ist, d.h. die zeitabhängige Schrödingergleichung löst. Bestimmen Sie außerdem die Koeffizienten $c_n(t, t_0)$ in

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t, t_0) \, |n\rangle , \tag{14}$$

wenn $|n\rangle$ die diskreten Energie-Eigenzustände von H sind.

(ab)+(cd) = 2 Kreuze