Aufgabenblatt 5

15 Ehrenfest-Theorem

Wir betrachten einen allgemeines eindimensionales Problem mit dem Hamiltonian

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X) \;, \tag{1}$$

wobei P und X der Impuls- und Ortsoperator sind und $V(X)$ ein allgemeines ortsabhängiges Potential.

a) Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Erwartungswertes des Impulsoperators in einem beliebigen Zustand $|\psi_t\rangle$ durch folgende Gleichung gegeben ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P\rangle_{\psi_t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\big\langle\, [V(X), P]\,\big\rangle_{\psi_t} \tag{2}$$

b) Zeigen Sie, dass für ein Potential $V(X) = aX^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P\rangle_{\psi_t} = -an\langle X^{n-1}\rangle_{\psi_t} \;. \tag{3}$$

Bleiben Sie dabei in der abstrakten Dirac-Notation (d.h. ohne Verwendung der Ortsdarstellung der Operatoren).

c) Interpretieren Sie Gleichung (3) für die Spezialfälle $n = 1, 2$ mit $a > 0$. Geben Sie für den Fall $n = 1$ die explizite Lösung für $\langle P\rangle_{\psi_t}$ an.

(a)+(bc) = 2 Kreuze

16 Der eindimensionale harmonische Oszillator in der Quantenmechanik

a) Der harmonische Oszillator ist eines der wenigen quantenmechanischen Systeme, für welches die Schrödingergleichung analytisch lösbar ist. Nennen Sie mindestens zwei konkrete Beispiele der Physik, wo der quantenmechanische harmonische Oszillator Anwendung findet.

b) Schreibe den Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators wie in der Vorlesung mithilfe des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators $a^\dagger$ und a auf. Drücke $a^\dagger$ und a mithilfe des Orts- und Impulsoperators X und P aus.

c) Drücken Sie den Operator der kinetischen Energie T und des harmonischen Potentials V mithilfe von $a^\dagger$ und a aus. Beweisen Sie den Virialsatz,

$$\langle n|T|n\rangle = \langle n|V|n\rangle \;, \tag{4}$$

wobei $|n\rangle$ ein Eigenzustand des Hamiltonoperators ist.

d) Wir betrachten einen sogenannten *kohärenten Zustand*

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{5}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\alpha|N|\alpha\rangle$ und $\langle\alpha|H|\alpha\rangle$, wobei $N = a^\dagger a$ der Besetzungszahloperator ist. Ist $|\alpha\rangle$ ein Energieeigenzustand?

(ab)+(cd) = 2 Kreuze

17 Spur und Dichteoperator

a) Die Spur (tr) einer Matrix A ist gegeben durch

$$\mathrm{tr}[A] = \sum_i \langle e_i|A|e_i\rangle \ , \tag{6}$$

wobei die $|e_i\rangle$ eine Orthogonalbasis bilden. Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}[A]$ undabhängig von der Wahl der Basis ist.

b) Zeigen Sie

(i) $\mathrm{tr}\big[\,|\phi\rangle\langle\chi|\,\big] = \langle\chi|\phi\rangle$

(ii) $\mathrm{tr}\big[AB\big] = \mathrm{tr}\big[BA\big]$ auch wenn $[A, B] \neq 0$.

(iii) $\mathrm{tr}\big[\rho A\big] = \langle\psi|A|\psi\rangle$ mit dem Dichteoperator $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

1 Kreuz