Aufgabenblatt 6

18 Zeitentwicklung kohärenter Zustände

Wir betrachten wieder kohärente Zustände im harmonischen Oszillator:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Hierbei sind $|n\rangle$ die Eigenzustände des harmonischen Oszillators.

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt zweier kohärenter Zustände: $\langle\alpha|\beta\rangle$.

b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustandes,

$$|\psi_t\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}|\alpha\rangle \tag{2}$$

und zeigen Sie, dass $|\psi_t\rangle$ für alle t selbst wieder ein kohärenter Zustand ist.

c) Berechnen Sie den Zerfall (und Wiederauferstehung) eines kohärenten Zustandes, d.h. berechnen Sie

$$p(t) = |\langle\alpha|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}|\alpha\rangle|^2 \; . \tag{3}$$

d) Berechenen Sie die zeitliche Entwicklung des Erwartungswertes des Ortsoperators, wenn sich das System in einem kohärenten Zustand befindet.

(ab)+(cd) = 2 Kreuze

19 Delta-Potential

Wir betrachten ein eindimensionales Teilchen im Potential $V(x) = -V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$, wobei $\delta(x)$ die Diracsche Deltafunktion ist.

a) Schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für dieses Potential auf.

b) Leiten Sie folgende Gleichungen für die Eigenzustände ψ des Hamiltonians her

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}y \,\big(E - V(y)\big)\,\psi(y) = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{x}^{\infty} \mathrm{d}y \,\big(E - V(y)\big)\,\psi(y) \; . \tag{4}$$

c) Hat die erste Ableitung der Wellenfunktion einen Sprung bei $x = 0$? Berechnen Sie dazu

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}(-x) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(+x)\right] \; . \tag{5}$$

d) Wieviele gebundene Zustände gibt es in diesem Potential? Berechnen Sie die dazugehörige Energie und Wellenfunktion.

1 Kreuz

20 Streuung

a) Erklären Sie durch den Zeitentwicklungsoperator (zeitabhängigen Schrödingergleichung), warum man üblicherweise davon spricht, dass eine eindimensionale ebene Welle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit $k > 0$ nach rechts und mit $k < 0$ nach links propagiert, vorausgesetzt das Potential ist konstant, $V(x) = \text{const.}$.

b) Berechnen Sie die Matrixelemente M_{21} und M_{11} der Transfermatrix M aus der Vorlesung (Tafel PDF Kapitel 3.4) explizit für den Fall $E < V_0$.

c) Bestimmen Sie für diesen Fall den Reflexionskoeffizienten R und Transmissionskoeffizienten T explizit und zeigen Sie, dass $T + R = 1$ gilt.

(a)+(bc) = 2 Kreuze