Aufgabenblatt 7

21 Elektron im Magnetfeld

Wir betrachten ein Elektron (ohne Spin), dass sich in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)^T$ befindet.

a) Begründen Sie, warum der Hamiltonoperator für diesen Fall die Form

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{P} + e\boldsymbol{A})^2 \ , \tag{1}$$

annimmt, mit der Elektronenladung e, dem Vektorpotential $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B}/2$, und dem dreidimensionalem Ortsoperator $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)^T$.

b) Zeigen Sie, dass dieser Hamiltonoperator ebenso geschrieben werden kann als

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 Y^2 + \omega L_z \ . \tag{2}$$

wobei L_z der Drehimpulsoperator in z-Richtung ist. Interpretieren Sie das Ergebnis.

1 Kreuz

22 Translation und Rotation

a) Wir betrachten den Operator (Ortsdarstellung)

$$T_a = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}aP} \qquad \text{wobei} \qquad P = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

der eindimensionale Impulsoperator ist und $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Zeigen sie, dass die Wirkung von T_a auf eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$T_a f(x) = f(x - a) \ . \tag{4}$$

b) Wir betrachten den Operator

$$U(\alpha, \boldsymbol{n}) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\alpha\boldsymbol{n}\boldsymbol{L}} \qquad \text{wobei} \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{P} = -\mathrm{i}\hbar \begin{pmatrix} y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \\ z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{5}$$

der dreidimensionale Bahndrehimpulsoperator ist, $\boldsymbol{n}$ ein Einheitsvektor und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Wir beschränken uns hier auf den Fall $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)^T$.

(i) Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten $(x, y, z) \to (r, \theta, \varphi)$ gilt,

$$\boldsymbol{nL} = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{6}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Wirkung von $U(\alpha, \boldsymbol{n})$ auf eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ durch eine Drehung um die z-Achse gegeben ist

$$U(\alpha, \boldsymbol{n}) f(r, \theta, \varphi) = f(r, \theta, \varphi - \alpha) \ . \tag{7}$$

Dabei können Sie auch Ihr Wissen aus Teilaufgabe (a) anwenden.

(a)+(b) = 2 Kreuze

23 Kugelflächenfunktionen

a) Die Kugelflächenfunktionen erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \ \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \ Y^*_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \ . \tag{8}$$

Diese zu beweisen ist allerdings sehr mühsam. Wir beschränken uns daher auf den "m-Teil", der aus der Integration über φ folgt: Setzen Sie einen geeigneten Ausdruck für $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ein und zeigen Sie, dass aus der φ-Integration das $\delta_{mm'}$ folgt.

b) Berechnen Sie explizit (d.h. ohne Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation)

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \ \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \ Y^*_{21}(\theta, \varphi) Y_{11}(\theta, \varphi) \tag{9}$$

c) Wir betrachten eine quadratintegrable Funktion

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm}(r) \ Y_{lm}(\theta, \varphi) \ , \tag{10}$$

die nach Kugelflächenfunktionen entwickelt ist. Zeigen Sie, dass für die Entwicklungskoeffizienten $a_{LM}(r)$ gilt

$$a_{LM}(r) = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \ \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \ f(\boldsymbol{r}) \ Y^*_{LM}(\theta, \varphi) \ . \tag{11}$$

d) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{1}{128\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)} (\sqrt{2}z + x - \mathrm{i}y) \tag{12}$$

nach Kugelflächenfunktionen. Beschränken Sie sich dabei auf $0 < l \leq 2$. Ist diese Entwicklung exakt?

(ab)+(cd) = 2 Kreuze