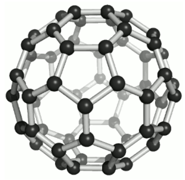
Aufgabenblatt 8

24 Elektron in einem Fulleren

Ein Elektron in einem C60 Fulleren lässt sich näherungsweise durch ein freies Elektron auf einer Kugeloberfläche modellieren. Die einzigen Freiheitsgrade sind θ und φ, wobei $r = r_0$ fixiert ist. Leiten Sie ab, dass der Hamiltonian dieses Modells über $H = \frac{1}{2mr_0^2}\boldsymbol{L}^2$ gegeben ist. Berechnen Sie in diesem Modell, dass die Anregungsenergie des Elektrons etwa durch 3.1 eV (gemessener Wert) gegeben ist. Nehmen Sie dabei an, dass sich das Elektron vor der Anregung im Zustand mit $l = 4$ befindet. Der Radius eines Fullerens ist $r_0 = 3.5\,\text{Å}$.

1 Kreuz



25 Elektron im Magnetfeld: Landau Level

Wir betrachten wieder die gleiche Situation wie in Aufgabe 21 und schreiben den Hamiltonian eines spinlosen Elektrons in einem Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)^T$ als

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\pi}^2 , \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{\pi} = (\pi_x, \pi_y, \pi_z)^T = \boldsymbol{P} + e\boldsymbol{A}$. Hier ist $\boldsymbol{P}$ der kanonische Impuls und das Vektorpotential in der symmetrischen Eichung $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B}/2$. Wir können die Eigenzustände des Hamiltonians über folgenden Weg finden:

a) Wir führen den Operator

$$a = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_x - \mathrm{i}\pi_y) \tag{2}$$

ein. Zeigen Sie, dass damit der Hamiltonian geschrieben werden kann als

$$H = \hbar\omega_B\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{P_z^2}{2m} , \tag{3}$$

wobei $\omega_B = eB/m$ die sogenannte Zyklotronfrequenz ist. Beachten Sie, dass ω_B nicht gleich ω aus Aufgabe 21 ist (genauer gesagt $\omega_B = 2\omega$).

b) Beweisen Sie die Kommutatorrelation $[\pi_x, \pi_y] = -\mathrm{i}e\hbar B$.

c) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte des Operators $N = a^\dagger a$ reell und positiv sind, d.h. zeigen Sie, dass N hermitesch und positiv ist. Ein Operator N ist positiv, wenn $\langle\psi|N|\psi\rangle \geq 0$ für beliebige $|\psi\rangle$.

d) Beweisen Sie die Kommutatorrelation $[a, a^\dagger] = 1$ und zeigen Sie, dass $a|n\rangle$ und $a^\dagger|n\rangle$ Eigenzustände von N sind, wenn $|n\rangle$ die Eigenzustände von N mit Eigenwerten $n > 0$ sind:

$$N\left[a|n\rangle\right] = (n-1)\left[a|n\rangle\right], \qquad N\left[a^\dagger|n\rangle\right] = (n+1)\left[a^\dagger|n\rangle\right] \tag{4}$$

e) Zeigen Sie, dass es ein minimales n_{min} mit $a|n_{\text{min}}\rangle = 0$ geben muss und es durch $n_{\text{min}} = 0$ gegeben ist. Erklären Sie, warum daraus folgt, dass die Eigenwerte von N ganzzahlig sind, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

f) Beweisen Sie $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ und $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

g) Wir beschränken uns nun auf die Physik in der xy-Ebene und ignorieren im Hamiltonian (3) den kinetischen Anteil in z-Richtung, d.h. wir betrachten ab jetzt nur noch $H = \hbar\omega_B\,(N + 1/2)$. Geben Sie Eigenenergien E_n des Hamiltonoperators in Abhängigkeit des Magnetfeldes B an.

Die Kreuzer (hi)+(jk) können bei der 9. Abgabe gesetzt werden. Auf Blatt 9 werden nur Aufgaben im Umfang 3 Kreuzer erscheinen, sodass Blatt8+Blatt9 insgesamt 10 Kreuzer ergeben.

---

h) Zeigen Sie, dass der Grundzustand in Ortsdarstellung $\psi_0(x, y) = \langle x, y|0\rangle$ folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}\left[-\mathrm{i}\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{eB}{2}\,(-y - \mathrm{i}x)\right]\psi_0(x, y) = 0\,. \tag{5}$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion in Gl. (6) mit der Normierungskonstante α und der magnetischen Länge $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ die Differentialgleichung (5) für beliebige $m = 0, 1, 2, \ldots$ erfüllt. Was sagt das über die Entartung des Grundzustands?

$$\psi_{0,m}(x, y) = \alpha\left(\frac{x - \mathrm{i}y}{l_B}\right)^m \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/4l_B^2} \tag{6}$$

j) Die Energie-Quantenzahl n reicht also noch nicht aus, um den Grundzustand eindeutig zu beschreiben. Welchen Operator können wir noch hinzuziehen, um gemeinsam mit H einen vollstandigen Satz kommutierender Observable zu erhalten?

k) Berechnen Sie die den ersten angeregten Zustand mit $m = 0$, d.h. berechnen Sie $\psi_{n,m}(x, y)$ mit $n = 1$ und $m = 0$.

(a)+(bc)+(de)+(fg)+(hi)+(jk)=6 Kreuze