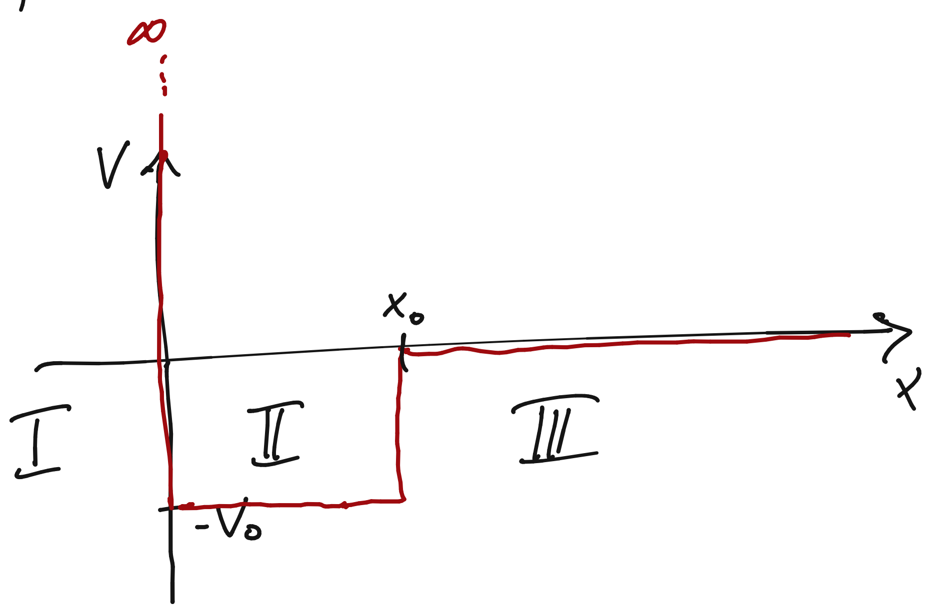
11) a)



Die 1D Schrödingergleichung können wir von

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

zu

$$\psi''(x) + \varkappa^2(x)\psi(x) = 0$$

umformen, wobei

$$\varkappa(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)}$$

Damit haben wir für den

→ Fall II : $\varkappa_{II} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(E + V_0\right)}$

→ Fall III : $\varkappa_{III} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$

→ Fall I : $\varkappa_I$ ist nicht definierbar.

wobei $\varkappa_i$ hier immer unabhängig von x ist.

11) b)

Mit dem Ansatz $\psi_i(x) = A_i e^{ik_i x}$ finden wir

$$\psi_i''(x) = -k_i^2\psi(x)$$

Einsetzen in die Schrödingergleichung liefert daher

$$-k_i^2\psi(x) + \varkappa_i^2\psi(x) = 0 \implies k_i^2 = \varkappa_i^2$$

$$\implies k_i = \pm\varkappa_i$$

Die Lösung hat daher die Form $\psi_i(x) = A_i e^{ik_i x} + B_i e^{-ik_i x}$

Für Fall I kann nur $\psi_I(x) = 0$ eine Lösung sein.

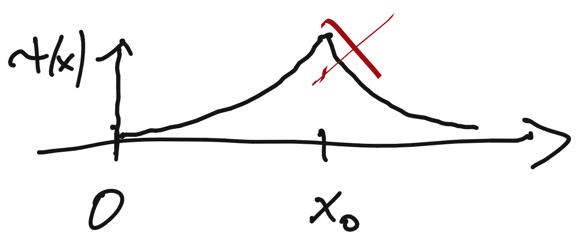
11)c)

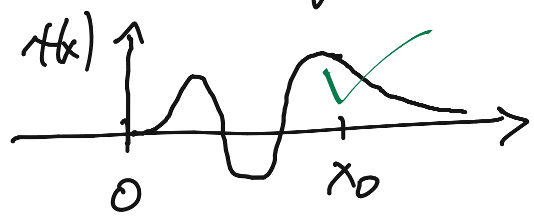
Damit das Teilchen im Bereich $[a,b]$ gebunden ist, muss $k(x)$ im Bereich $[-\infty,a]$ und $[b,\infty]$ imaginär sein, damit die Wellenfunktion in diesem Bereich gezwungen ist auf 0 abzufallen, d.h. wegen $k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))}$ muss gelten $E - V(x) < 0$ für $x \in [-\infty,a]$ und $x \in [b,\infty]$.

Für unsere Aufgabe folgt mit $a=0$ und $b=x_0$ einfach

$$E<0$$

Außerdem darf im Fall II $k(x)$ **nicht** imaginär sein, da sonst $\psi'(x)$ bei $x=x_0$ nicht stetig ist $\Rightarrow E > -V_0$





Für gebundene Zustände ist k_{II} also reell und k_{III} imaginär.

11)d)

Aus den Stetigkeitsbedingungen und $\psi(x=0) \overset{!}{=} 0$ finden wir zunächst:

$$\psi_{II}(x) = A\sin(k_{II}x) \quad \text{und}$$

$$\psi_{III}(x) = B e^{-k_{III}x}$$

wobei wir jetzt hier verwenden $k_{II} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)}$

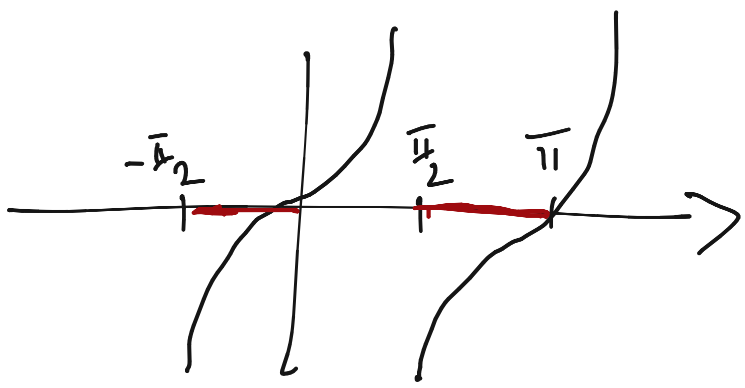
und $k_{III} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(-E)}$.

Aus $\psi_{II}(x_0) = \psi_{III}(x_0)$ und $\psi'_{II}(x_0) = \psi'_{III}(x_0)$ folgt

$$A\sin(k_{II}x_0) = Be^{-k_{III}x_0}$$
$$k_{II}A\cos(k_{II}x_0) = -k_{III}Be^{-k_{III}x_0}$$

und damit

$$\frac{1}{k_{II}}\tan(k_{II}x_0) = -\frac{1}{k_{III}}$$ sodass in jedem Fall $\tan(k_{II}x_0) < 0$



$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < k_{II}x_0 < n\pi$$

Mit $\tan^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} = \left(\frac{\cos^2}{\sin^2}\right)^{-1} = \left(\frac{\cos^2 + \sin^2}{\sin^2} - 1\right)^{-1}$

$$= \left(\frac{1}{\sin^2} - 1\right)^{-1}$$

können wir das umschreiben als

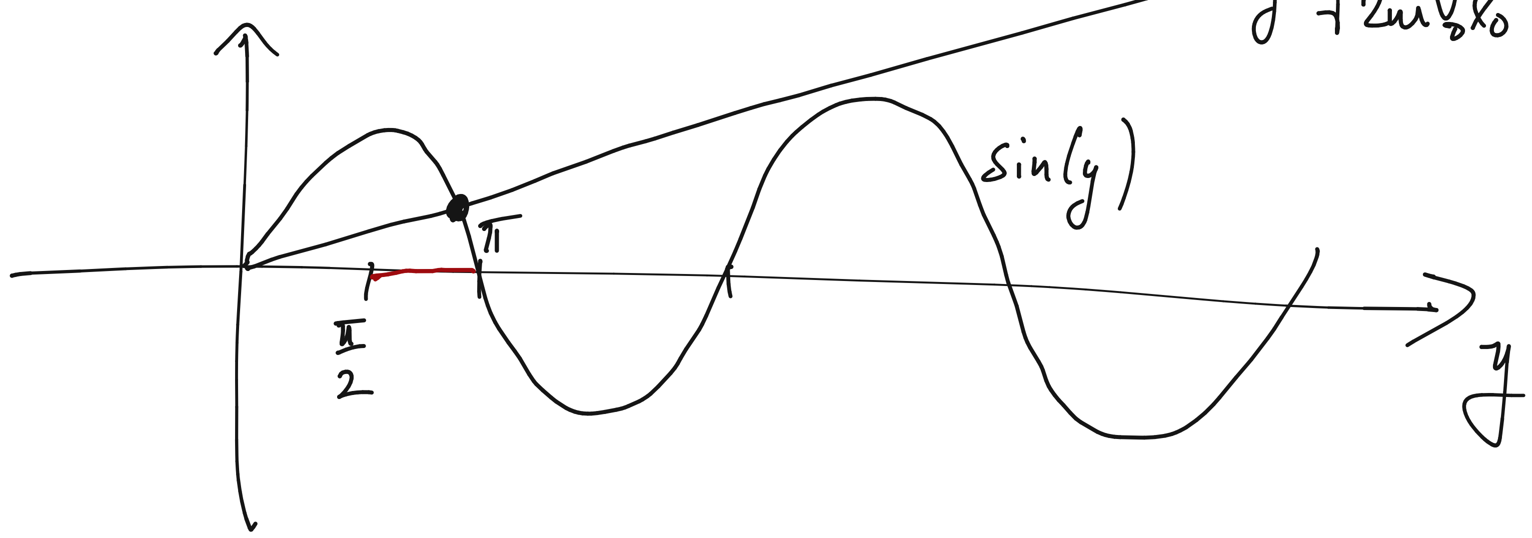
$$\tan^2(k_{II}x_0) = \left(\frac{k_{II}}{k_{III}}\right)^2 \Longrightarrow \frac{1}{\sin^2(k_{II}x_0)} = 1 + \left(\frac{k_{III}}{k_{II}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin(k_{II}x_0) = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{k_{III}}{k_{II}}\right)^2}} = k_{II}\sqrt{\frac{1}{k_{II}^2 + k_{III}^2}}$$

$$= k_{II}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0}} = k_{II}x_0\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0x_0^2}}$$

Wir variieren E, d.h. nur k_{II} wird variiert, und wir substituieren $y = k_{II}(E) \cdot x_0$, sodass:

$$\sin(y) = y\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0x_0^2}}$$



Beachte: Wir haben vorher $-\frac{\pi}{2} + n\pi < \underbrace{k_{II}x_0}_{y} < n\pi$ bestimmt.

$\Rightarrow$ D.h. das $y\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0x_0^2}}$ für $y = \frac{\pi}{2}$ kleiner als 1 sein muss, da es sonst keinen Schnittpunkt neben $y=0$ gibt.

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0x_0^2}} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\pi^2} V_0 x_0^2 > \frac{\hbar^2}{2m}$$