QT 1 2022W

Musterlösung für 1. Test

Hinweis: Wegen der Inkonsistenzen in Aufgabe 2 werden folgende Änderungen für die Bewertung vorgenommen:

Aufgabe 1: 20 P $\rightarrow$ 40 P

Aufgabe 2: 35 P $\rightarrow$ 15 P (+20 Zusatzpunkte)

Aufgabe 3: 35 P (bleibt)

Insgesamt sind daher 110 P erreichbar, wobei die volle Punktzahl schon mit 90 P erreicht ist.

Die Punktevergabe ist als Leitlinie zu verstehen. Alternative Lösungswege werden ebenso einheitlich und transparent bewertet. Volle Punktzahl bei Weg + Lösung korrekt.

---

1)c) Betrachte „Matrixelemente"

12

+2 vertauschen
+2 kompl. konj.
+2 ident.
+2 scalar vert.
+2 kompl. konj.
+2 ident. raus

$$\langle q|(AB)^\dagger|q'\rangle = \langle q'|AB|q\rangle^*$$

$$= \left[\int dq'' \langle q'|A|q''\rangle\langle q''|B|q\rangle\right]^*$$

$$= \left[\int dq'' \langle q''|B|q\rangle\langle q'|A|q''\rangle\right]^*$$

$$= \int dq'' \langle q|B^\dagger|q''\rangle\langle q''|A^\dagger|q'\rangle$$

$$= \langle q|B^\dagger A^\dagger|q'\rangle \Rightarrow (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

1)d) Verwende a) +2

8

+2 $U^\dagger = U^{-1}$
+2 $A^\dagger = A$

$$(UAU^{-1})^\dagger = \big(U\underbrace{(AU^{-1})}_{+2}\big)^\dagger = (AU^{-1})^\dagger U^\dagger$$

$$= (U^{-1})^\dagger A^\dagger U^\dagger = UAU^{-1}$$

1)b)

8

+2 def. Komm.
+2 Testfunktion h
+2 Produktregel
+2 Verallgemein.

$$[\partial_x, f]h = \partial_x(fh) - f\partial_x h$$

$$= (\partial_x f)h + \cancel{f\partial_x h} - \cancel{f\partial_x h}$$

$$= (\partial_x f)h \Rightarrow [\partial_x, f] = (\partial_x f)$$

a) 12

+2 Einsetzen   +2 Def. Komm.

$$[A,B] = \frac{1}{2}[B^2, B] = \frac{1}{2}(B^3 - B^3) = 0$$

+2 Einsetzen   +4 Formel oder Umformen

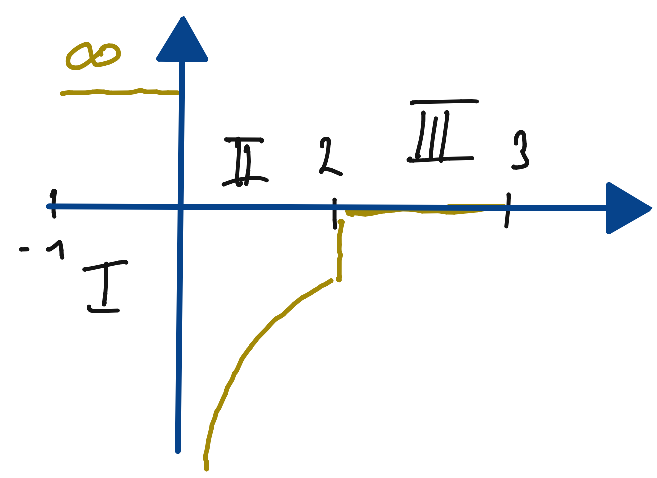
$$[A,C] = \frac{1}{2}[B^2, C] = \frac{1}{2}\left(B[B,C] + [B,C]B\right)$$

$$= iB$$

+2 Anwendung $[B,C] = i$

---

2)a) 4



+1 bottomless

+1 Steigung richtig

+1 Stufe von II → III

+1 Bereich I und III leer

2)b) 9 1

$\psi_I(x) = 0$ +1 weil $V = \infty$ und $E < \infty$

$\psi_{III}(x) = Ae^{-\gamma x}$ +1 weil $E < V_{III}^{max} = 0$ +1

+1

$$\psi_{II}(x) = \alpha x e^{-x}$$

$$\psi_{II}'(x) = \alpha e^{-x} - \alpha x e^{-x}$$

+1 Produktregel

+1 $\alpha x e^{-x}$

$$\psi_{II}''(x) = -\alpha e^{-x} - \alpha e^{-\alpha x} + \alpha x e^{-x}$$

+1 richtig

$$= \psi_{II}(x)\left(-\frac{2}{x} + 1\right)$$

+1 SGL

SGL: $-\frac{1}{2}\psi_{II}''(x) + V(x)\psi_{II}(x) = E\psi_{II}(x)$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x} + 1\right) - \frac{1}{x} = E \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{1}{2}$$

+1 Energie

löst SGL

+1 Einsetzen

2)e) $\psi(x)$ hat keine Knoten.

2

Sturm-Liouville : + 2

n-te Eigenfunktion hat $(n-1)$-Knoten

$\Rightarrow$ $\psi(x)$ ist 1. Eigenfunktion

---

2)c) Ab hier entsteht das Problem, dass der gegebene Ansatz für Bereich II zwar eine Konstruktion von $\psi(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ zulässt, sodass ...

(i) „... die Anschlussbedingungen erfüllt sind"

oder

(ii) „... es abschnittsweise Eigenfunktion von H mit Energie $E = -1/2$ ist",

wobei jedoch (i) und (ii) nicht gleichzeitig erfüllt werden können. Die Lösung der SGL für $x \in \mathbb{R}$ ist daher mit dem gegebenen Ansatz für II nicht möglich.

Es werden folgende Zusatzpunkte vergeben:

2)c) Anschlussbedingungen $\psi_{II}(2) = \psi_{III}(2)$ +1

10

$\psi_{II}'(2) = \psi_{III}'(2)$ +1

Ableitungen: $\psi_{II}'(x) = \alpha e^{-x}(1-x)$ +2

$\psi_{III}'(x) = -A\varkappa e^{-\varkappa x}$ +2

Bestimmung von $\varkappa$ aus

(i) Anschlussbedingung $\varkappa = \frac{1}{2}$ $+2$

oder

(ii) aus Energie $E = -\frac{1}{2}$: $\varkappa = 1$ $+2$

Bestimmung von $A = \frac{2\alpha}{e}$ aus Anschlussbedingungen : $+2$

2) d) Ansatz, dass α aus Normierung folgt : $+2$

10 Aufschreiben mit korrekten Grenzen:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} |\psi_I(x)|^2}_{=0} + \underbrace{\int_{0}^{2} |\psi_{II}(x)|^2}_{I_1} + \underbrace{\int_{2}^{\infty} |\psi_{III}(x)|^2}_{I_2}$$

$+1$ $|\psi|^2$ $+1$ $+1$ $+1$

$$I_1 = \alpha^2 \int_0^2 dx \; x^2 e^{-2x} = -\frac{\alpha^2}{2}\left[e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)\right]_0^2$$

$+1$ Anwendung Formel

$$= -\frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{13}{2}e^{-4} - \frac{1}{2}\right]$$

$+1$ Ergebnis

$$I_2 = \begin{cases} A^2 e^{-2} & \text{mit } \varkappa = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} A^2 e^{-4} & \text{mit } \varkappa = 1 \end{cases} \qquad \left(\text{mit } A = \frac{2\alpha}{e}\right)$$

$+2$ für eine der möglichen Lösungen.

3) a) Sei $|\psi\rangle$ EV von H mit $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ +1

(5)

$$\Rightarrow \quad a(t) = \langle\psi| e^{-iHt} |\psi\rangle = e^{-iEt}$$

+1 $e^{-iHt}\psi = e^{-iEt}\psi$

+1 e^{-iEt} scalar

+1 $|e^{ix}| = 1$

+1 $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$$\Rightarrow \quad p(t) = 1$$

Eigenzustände sind "stationär", zerfallen nicht.

3) b) Anfangszustand $(t_0 = 0)$: $|\psi\rangle$ +1 für t_0

(6)

Zeitentwicklungsoperator (folgt aus SGL): $U = e^{-iHt}$

$$\Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi\rangle$$ +1 für U

+1 sinngemäß

Wahrscheinlichkeitsamplitude für "wieder den Zustand $|\psi\rangle$ messen": $a(t) = \langle\psi|\psi(t)\rangle$ +1 +1

$$\Rightarrow \quad p(t) = |a(t)|^2 \overset{+1}{=} \left|\langle\psi| e^{-iHt} |\psi\rangle\right|^2$$

3) c) Normierung ausnutzen: $1 \overset{!}{=} \langle\psi|\psi\rangle$ +1 Ansatz

(7)

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE \; f(E) \; |\phi_E\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle\psi| = \int_{-\infty}^{\infty} dE \; f^*(E) \; \langle\phi_E|$$

+1 Bra

+1 $f \to f^*$

$$\text{also} \quad \langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \; f^*(E') f(E) \; \overbrace{\langle\phi_{E'}|\phi_E\rangle}^{\delta(E-E') \; +1}$$

+1 $\int\delta = 1$

+1 $E' \to E$

+1 $z^* z = |z|^2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE \; |f(E)|^2 \overset{!}{=} 1$$

3)d) $a(t) = \langle \psi | e^{-iHt} | \psi \rangle$

+1 Bra
+1 $\langle\psi|$ ist linear
+1 $e^{-iHt}|E\rangle = e^{-iEt}|E\rangle$

7

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \, f^*(E) f(E') \underbrace{\langle E | e^{-iHt} | E' \rangle}_{\delta(E-E')\, e^{-iEt}}$$

+1 $f(E)$ ist skalar

+1

+1 scalar rausziehen

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE \, |f(E)|^2 \, e^{-iEt}$$

+1 $\int \delta = 1$

3)e) $f(E) = \Theta(E) \, e^{-E/2}$

+1 $(e^x)^2 = e^{2x}$
+1 $|e^{i\mathbb{R}}| = e^{\mathbb{R}}$

9

$$\Rightarrow a(t) = \int_0^{\infty} e^{-E} e^{-iEt}$$

+1

$$= \int_0^{\infty} e^{-E(1+it)}$$

+1 $e^a e^b = e^{a+b}$

$$= -\frac{1}{1+it} e^{-E(1+it)} \Big|_0^{\infty}$$

+1 $z = 1+it$
+1 $\int e^x = e^x$
+1 Grenzen ausgewertet

$$= \frac{1}{1+it} = \frac{1}{z} \quad \text{mit} \quad z = 1+it$$

$$\Rightarrow p(t) = |a(t)|^2 = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

+1 $|z| = zz^*$
+1 $\left(\frac{1}{z}\right)^* = \frac{1}{z^*}$