Plena zur Vorlesung Quantentheorie I

Wien, 2022 W

Tobias Schäfer

I. Plenum (10.10.22)

Hilbertraum und Dirac-Notation

1. Erinnerung an Vektorräume

Jedem bekannt sind beispielsweise Vektoren $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ oder $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Das sind 3-Tupel über den Körper $\mathbb{R}$.
Betrachte z.B.

$$u + v = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 3+0 \\ 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot v = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \text{usw...}$$

Allgemeiner: Ein Vektorraum über ein Körper K ist eine Menge V zusammen mit zwei Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : K \times V \to V$, welche folgende Axiome erfüllen.

Assoziativg.
(+1) $u + (v + w) = (u+v) + w \qquad u, v, w \in V$

(+2) $\exists\ 0 \in V$ mit $v + 0 = 0 + v = v$

(+3) $\forall v\ \exists$ inverses Element $-v$ mit $v + (-v) = (-v) + v = 0$

(+4) $u + v = v + u$

Distributiv-Gesetze
(·1) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha u + \alpha v \qquad \alpha \in K, \ u, v \in V$

(·2) $(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v \qquad \beta \in K$

Assoziativg.
(·3) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha (\beta v)$

(·4) $\exists\ 1 \in K$ mit $1 \cdot v = v$

2. Der N-dim Hilbertraum $\mathcal{H}_N$ in Dirac-Notation

Ein N-dim Hilbertraum $\mathcal{H}_N$ ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$, gepaart mit einem Skalarprodukt $\mathcal{H}_N \times \mathcal{H}_N \to \mathbb{C}$, der vollständig bezüglich der vom Skalarpr. induzierten Norm ist.

In der Dirac-Notation schreiben wir Vektoren als $|\psi\rangle, |\varphi\rangle, |\chi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_N$. Wegen der Axiome gilt

$|\psi\rangle + |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_N$, $\alpha|\psi\rangle \in \mathcal{H}_N$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, usw...

Das Skalarprodukt schreiben wir als $\langle\psi|\varphi\rangle \in \mathbb{C}$, wobei es folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$ und $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0$

(b) Sei $|\psi\rangle = |\varphi\rangle + |\chi\rangle$, dann gilt

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\varphi\rangle + \langle\phi|\chi\rangle$$

(c) Sei $|\psi\rangle = \alpha|\varphi\rangle$, dann gilt $\langle\phi|\psi\rangle = \alpha\langle\phi|\varphi\rangle$

(d) $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$ (komplex konjugiert)

Anmerkungen:

(1) Wegen (d) gilt für $|\psi\rangle = \alpha|\varphi\rangle$:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \alpha^*\langle\varphi|\phi\rangle$$

$\Rightarrow$ Skalarprodukt ist antilinear im ersten und linear im zweiten Argument.

(2) Mit dem Skalarprodukt können wir eine **Norm** definieren:

$$\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$$

(3) Schwarzsche Ungleichung: $|\langle\psi|\varphi\rangle| \leq \| |\psi\rangle \| \cdot \| |\varphi\rangle \|$

Dreiecksungleichung:

$$\big| \| |\psi\rangle \| - \| |\varphi\rangle \| \big| \leq \| |\psi\rangle + |\varphi\rangle \| \leq \| |\psi\rangle \| + \| |\varphi\rangle \|$$

(4) Wir nennen $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ orthogonal, wenn $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$.

(5) Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem $\{|e_1\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$, auch Orthonormalbasis genannt, wobei gilt $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$. Ein beliebiger Vektor $|\psi\rangle$ ist immer darstellbar als

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |e_i\rangle, \qquad c_i \in \mathbb{C}$$

und es folgt

$$\langle e_j|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i \underbrace{\langle e_j|e_i\rangle}_{\delta_{ji}} = c_j$$

(6) Jeder abstrakte Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_N$ lässt sich konkret als Spaltenvektor in $\mathbb{C}^N$ darstellen. Sei $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |e_i\rangle$, dann ist Spaltenvektor in dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

gegeben.

Beispiel:

$$|\psi\rangle = 3.2\,|e_1\rangle + e^{i\pi}|e_2\rangle + 6|e_3\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3.2 \\ e^{i\pi} \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Der Dualraum mit „bra-Vektoren"

Wir kennen nun $|\psi\rangle$ als Vektoren und $\langle\phi|\psi\rangle$ als Skalarprodukt. Wir können aber auch dem Objekt $\langle\phi|$ eine sinnvolle Bedeutung geben, in dem wir es als lineare Funktion $F_\phi : \mathcal{H}_N \to \mathbb{C}$ auffassen welche Vektoren auf komplexe Zahlen abbildet:

$$\underbrace{F_\phi(|\psi\rangle) \hat{=} \langle\phi|\,(|\psi\rangle)}_{\text{"}\langle\phi| \text{ angewendet auf } |\psi\rangle\text{"}} \in \mathbb{C}$$

Wir definieren diese Funktion nun als das bekannte Skalarprodukt: $F_\phi(|\psi\rangle) := \langle\phi|\psi\rangle$, sodass wir schreiben können:

$$\underbrace{\langle\phi|\,(|\psi\rangle)}_{\langle\phi| \text{ angewendet auf } |\psi\rangle} = \underbrace{\langle\phi|\psi\rangle}_{\text{Skalarprodukt zwischen } |\phi\rangle \text{ und } |\psi\rangle}$$

Da diese Funktionen $\langle\phi|$ selbst wieder die Axiome eines Vektorraums erfüllen, wird dieser Vektorraum der Dualraum $\mathcal{H}_N^*$ genannt. Es besteht nun eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{H}_N^*$:

$$\mathcal{H}_N \longleftrightarrow \mathcal{H}_N^*$$

"ket-Vektor" $|\psi\rangle$ $\longleftrightarrow$ "bra-Vektor" $\langle\psi|$

$$|\psi\rangle = \alpha|\phi_1\rangle + \beta|\phi_2\rangle \longleftrightarrow \langle\psi| = \alpha^*\langle\phi_1| + \beta^*\langle\phi_2|$$