

VI. Plenum - Übungsaufgaben

1 Aufgabe (harmonischer Oszillator & Störungstheorie)

- a) Berechnen Sie die Korrektur 2. Ordnung Störungstheorie von Aufgabe 31.
- b) Berechnen Sie $[a^n, a^\dagger]$ mittels $[a, a^\dagger] = 1$.

2 Aufgabe (Drehimpuls)

- a) Der Hamilton-Operator eines starren Moleküls, das um den Koordinatenursprung im Schwerpunktsystem rotiert, lautet:

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2\Theta}. \quad (1)$$

\mathbf{L} ist der Bahndrehimpulsoperator und Θ das skalare Trägheitsmoment des Moleküls. Welche Werte kann das Messgrößenpaar $\{H, L_z\}$ annehmen?

- b) Ein Operator C erfüllt $[C, L_x] = 0$ und $[C, L_y] = 0$. Beweisen Sie, dass dann auch C mit L_z vertauschen muss.

3 Aufgabe (Zwei Spins)

Wir betrachten zwei Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen in der Orthonormalbasis der vier Kombinationsmöglichkeiten up-up, down-up, up-down und down-down:

$$|\pm \pm\rangle = (|++\rangle, | - +\rangle, | + -\rangle, |--\rangle). \quad (2)$$

- a) Die Spin-Operatoren in z -Richtung des ersten bzw. zweiten Teilchens sind als 4×4 Matrix der Basis aus Gleichung (??) geschrieben

$$S_{1,z} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{2,z} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Finden Sie die Matrixelemente der Spin-Operatoren $S_{1,x}$, $S_{2,x}$, $S_{1,y}$ und $S_{2,y}$ und geben Sie alle in der Basis aus Gleichung (??) in Form einer 4×4 Matrix an.

- b) Addieren Sie die Spin-Operatoren zu den Gesamtspin-Operatoren $S_x = S_{1,x} + S_{2,x}$, $S_y = S_{1,y} + S_{2,y}$, $S_z = S_{1,z} + S_{2,z}$ und berechnen Sie S_x^2 , S_y^2 , und S_z^2 .
- c) Zeigen Sie, dass eine Messung von $\mathbf{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ nur die beiden Werte 0 und $2\hbar^2$ ergeben kann und geben Sie die Entartung dieser Eigenwerte an.