25 h) Für den Grundzustand $|0\rangle$ gilt:

$$a|0\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,y|a|0\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \int dx'dy' \langle x,y|a|x',y'\rangle \underbrace{\langle x',y'|0\rangle}_{\psi_0(x',y')} = 0$$ und

$$\langle x,y|a|x',y'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}\left(\langle x,y|\pi_x|x',y'\rangle - i\langle x,y|\pi_y|x',y'\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}\Big(\underbrace{\langle x,y|P_x|x',y'\rangle}_{\delta(x-x')\delta(y-y')(-i\hbar\partial_{x'})} - \frac{1}{2}Be\underbrace{\langle x,y|Y|x',y'\rangle}_{\delta(x-x')\delta(y-y')y'} - i\underbrace{\langle x,y|P_y|x',y'\rangle}_{\delta(x-x')\delta(y-y')(-i\hbar\partial_{y'})} - \frac{i}{2}Be\underbrace{\langle x,y|X|x',y'\rangle}_{\delta(x-x')\delta(y-y')x'}\Big)$$

$$= \frac{\delta(x-x')\delta(y-y')}{\sqrt{2e\hbar B}}\left(-i\hbar\partial_{x'} - \frac{Be}{2}y' - \hbar\partial_{y'} - \frac{iBe}{2}x'\right)$$

Integral und δ's heben sich weg und wir finden

$$\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}\left[-i\hbar\left(\partial_x - i\partial_{y}\right) + \frac{Be}{2}\left(-y - ix\right)\right]\psi_0(x,y) = 0$$

25) i)

$$\psi_{0m}(x,y) = \alpha \left(\frac{x-iy}{l_B}\right)^m e^{-(x^2+y^2)/4l_B^2}$$

Berechne Ableitungen:

$$\partial_x \psi_{0m}(x,y) = \alpha \left[\frac{m}{l_B}\left(\frac{x-iy}{l_B}\right)^{m-1} - \frac{2x}{4l_B^2}\left(\frac{x-iy}{l_B}\right)^m\right] e^{-(x^2+y^2)/l_B^2}$$

$$= \left(\frac{m}{x-iy} - \frac{x}{2l_B^2}\right)\psi_{0m}(x,y)$$

$$\partial_y \psi_{0m}(x,y) = \alpha \left[\frac{-im}{l_B}\left(\frac{x-iy}{l_B}\right)^{m-1} - \frac{2y}{4l_B^2}\left(\frac{x-iy}{l_B}\right)^m\right] e^{-(x^2+y^2)/l_B^2}$$

$$= \left(\frac{-im}{x-iy} - \frac{y}{2l_B^2}\right)\psi_{0m}(x,y)$$

$$\Rightarrow -i\hbar\left(\partial_x - i\partial_y\right)\psi_{0m}(x,y) = -i\hbar\left[\left(\frac{m}{x-iy} - \frac{x}{2l_B^2}\right) - i\left(\frac{-im}{x-iy} - \frac{y}{2l_B^2}\right)\right]\psi_{0m}(x,y)$$

$$= -i\hbar\left(-\frac{x}{2l_B^2} + i\frac{y}{2l_B^2}\right)\psi_{0m}(x,y)$$

$$= \frac{eB}{2}\left(ix + y\right)\psi_{0m}(x,y)$$

$$\Rightarrow \left[-i\hbar\left(\partial_x - i\partial_y\right) + \frac{eB}{2}\left(-y - ix\right)\right]\psi_{0m}(x,y) = 0 \quad \text{qed}$$

Der Grundzustand ist unendlichfach entartet, denn $m = 0, 1, 2, \dots$ sind alles Lösungen der gleichen Energie $E_0 = \frac{\hbar eB}{2}$.

25) j)

Der Hamiltonian kommutiert mit Operator L_z, denn

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{\omega_B}{2} L_z + \frac{1}{4} m\omega_B^2 x^2 + \frac{1}{4} m\omega_B^2 y^2$$

und $[L_z, \vec{p}^{\,2}] = 0$ und $[L_z, x^2] = [L_z, y^2] = 0$.

Die Quantenzahl m stellt sich als Eigenwert von L_z heraus (einsetzen):

$$L_z \psi_{0m}(x,y) = -\hbar m \, \psi_{0m}(x,y)$$

Das Minus kommt durch die Eichung.

25) k)

Wir kennen $\psi_{0m}(x,y)$ als Grundzustand, insbesondere mit $m=0$ als

$$\psi_{00}(x,y) = \propto e^{-(x^2+y^2)/4\ell_B^2} = \langle x,y|00\rangle$$

Wir finden $\psi_{10}(x,y) = \langle x,y|10\rangle$ über

$$\psi_{10}(x,y) = \langle x,y|a^+|00\rangle = \int dx'dy' \, \langle x,y|a^+|x',y'\rangle\langle x',y'|00\rangle$$

Analog zu 26)h) finden wir

$$\langle x,y|a^+|x',y'\rangle = \frac{\delta(x-x')\delta(y-y')}{\sqrt{2e\hbar B}}\left(-i\hbar\partial_{x'} - \frac{Be}{2}y' + \hbar\partial_{y'} + \frac{iBe}{2}x'\right)$$

$$= \frac{\delta(x-x')\delta(y-y')}{\sqrt{2e\hbar B}}\left(-i\hbar(\partial_{x'} + i\partial_{y'}) + \frac{Be}{2}(-y'+ix')\right)$$

D.4.

$$\psi_{10}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}\left(-i\hbar\left(\partial_x + i\partial_y\right) + \frac{Be}{2}\left(-y+ix\right)\right)\alpha e^{-(x^2+y^2)/4\ell_B^2}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2e\hbar B}}\left[\frac{i\hbar 2x}{4\ell_B^2} - \frac{\hbar 2y}{4\ell_B^2} + \frac{Be}{2}(-y+ix)\right) e^{-(x^2+y^2)/4\ell_B^2}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2e\hbar B}}\left[\frac{eB}{2}ix - \frac{eB}{2}y - \frac{Be}{2}y + \frac{Be}{2}ix\right] e^{-(x^2+y^2)/4\ell_B^2}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2e\hbar B}} Be\left[ix-y\right] e^{-(x^2+y^2)/4\ell_B^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{\ell_B}\left[ix-y\right] e^{-(x^2+y^2)/4\ell_B^2}$$