1. Test

$\boxed{1}$. Aufgabe ~~(20 Punkte)~~(40 Punkte)

a) Berechnen Sie $[A, B]$ und $[A, C]$, wobei für die linearen Operatoren gilt $A = B^2/2$ und $[B, C] = \mathrm{i}$.

b) Zeigen Sie, dass $\left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x)\right] = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$,
wobei $f(x)$ eine beliebige differenzierbare Funktion ist.

c) Zeigen Sie, dass $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.
Hierbei sind A und B lineare Operatoren mit kontinuierlichem Spektrum in einem ∞-dimensionalen Hilbertraum mit Basis $\{|e_q\rangle,\ q \in \mathbb{R}\}$ und $\langle e_q | e_{q'}\rangle = \delta(q - q')$.

d) Zeigen Sie, dass $(UAU^{-1})^\dagger = UAU^{-1}$,
wobei U ein unitärer und A ein hermitescher Operator ist.

$\boxed{2}$. Aufgabe ~~(35 Punkte)~~(15 Punkte)

Wir betrachten das eindimensionale Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{Bereich I: } x < 0 \ , \\ -\frac{1}{x} & \text{Bereich II: } 0 \le x \le 2 \ , \\ 0 & \text{Bereich III: } x > 2 \ . \end{cases} \tag{1}$$

Zur Einfachheit sind alle Größen dimensionslos ($\hbar = 1, m = 1, \ldots$). Gesucht ist ein gebundener Zustand mit $E < 0$.

a) Skizzieren Sie das Potential im Bereich $x \in [-1, 3]$ und kennzeichnen Sie die drei Bereiche I, II, III deutlich.

b) Schreiben Sie einen Ansatz für die Wellenfuntion $\psi_{\mathrm{I}}(x)$ und $\psi_{\mathrm{III}}(x)$ für Bereich I und III auf. Zeigen Sie, dass der Ansatz $\psi_{\mathrm{II}}(x) = \alpha x \mathrm{e}^{-x}$ die Schrödingergleichung im Bereich II löst ($\alpha \in \mathbb{C}$). ~~Bestimmen Sie dabei die Energie E des Zustands.~~

c) ~~Lösen Sie die Schrödingergleichung für $x \in \mathbb{R}$ mit den obigen Ansätzen aus b), sodass alle Konstanten bis auf α bestimmt sind. Geben Sie zum Schluss $\psi(x)$ für alle Bereiche in folgender Form an:~~

$$\cancel{\psi(x) = \begin{cases} \ldots & \text{Bereich I: } x < 0 \ , \\ \ldots & \text{Bereich II: } 0 \le x \le 2 \ , \\ \ldots & \text{Bereich III: } x > 2 \ . \end{cases}} \tag{2}$$

d) ~~Zeigen Sie, dass α durch folgende Gleichung bestimmt ist,~~

$$\cancel{\frac{\alpha^2}{4}\left(1 + 3\mathrm{e}^{-4}\right) = 1} \ . \tag{3}$$

e) Warum ist $\psi(x)$ der Zustand mit der niedrigsten Energie?

$\boxed{3}$. Aufgabe (35 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit $p(t)$ einen bei $t = 0$ gemessenen und normierten Quantenzustand $|\psi\rangle$ nach einer Zeit t erneut zu messen ist gegeben durch

$$p(t) = |a(t)|^2 \quad \text{mit} \quad a(t) = \langle\psi|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi\rangle \ , \quad \text{und} \quad \hbar = 1 \ . \tag{4}$$

a) Berechnen Sie $p(t)$ unter der Annahme, dass $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von H ist.

b) Folgern Sie die Formel für $p(t)$ aus der Schrödingergleichung und den Postulaten der Quantenmechanik.

c) Wir entwicklen den Zustand in der Basis der Eigenvektoren des Hamiltonoperators $\{|\phi_E\rangle : \ H|\phi_E\rangle = E|\phi_E\rangle\}$ als

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E \ f(E) \ |\phi_E\rangle \ . \tag{5}$$

Zeigen Sie damit, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E \ |f(E)|^2 = 1 \ . \tag{6}$$

d) Drücken Sie die Amplitude $a(t)$ durch $f(E)$ aus, d.h. zeigen Sie, dass

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E \ |f(E)|^2 \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et} \ . \tag{7}$$

e) Berechnen Sie $p(t)$ für $f(E) = \theta(E)\,\mathrm{e}^{-E/2}$, wobei θ die Heaviside-Stufenfunktion ist.