1. Tutorium VU Quantentheorie I, 13.10.2023

1. Im Laufe der Quantentheorie 1 VU werden Sie immer wieder mit Integralen von Gaußfunktionen zu tun haben. Wir wollen deshalb gleich zu Beginn des Semesters wichtige Relationen beweisen.

   (a) Zeigen Sie, dass gilt

   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad \alpha > 0. \tag{1}$$

   Hinweis: Quadrieren Sie das gesamte zu berechnende Integral und wechseln Sie anschließend zu Polarkoordinaten.

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass allgemeiner gilt

   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\beta^2/(4\alpha)-\gamma}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta,\gamma \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

   Hinweis: Bilden Sie ein vollständiges Quadrat.

   (c) Berechnen Sie die verschiedenen Momente $\langle x^0\rangle$, $\langle x^1\rangle$ und $\langle x^2\rangle$, wobei

   $$\langle x^n\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^n \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha x^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

   Deuten Sie die Gaußfunktion nun als Wahrscheinlichkeitsverteilung und bringen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Mittelwert und der Varianz der Variable x in Verbindung.
   Hinweis: Eine eventuell mühsame partielle Integration kann durch den Feynman-Trick vermieden werden (vgl. Skriptum S.4).

2. Gegeben sei die Matrix $H \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ in der kanonischen Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ mit $i \in \{1,2\}$

   $$H \xrightarrow{\{\mathbf{e}_i\}} H^{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 3 & y \\ -2i & 0 \end{pmatrix}, \qquad y \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

   (a) Wählen Sie y so, dass H eine hermitesche Matrix ist. Welche Eigenschaften erfüllen die Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix?

   (b) Berechnen Sie die Eigenwerte, E_i, und die normierten Eigenvektoren, $\mathbf{h}_i$, und geben Sie sie in der kanonischen Basis an. Zeigen Sie explizit, dass die normierten Eigenvektoren eine vollständige und orthonormale Basis bilden.

(c) Wir wollen nun H in der Eigenbasis darstellen. Als Eigenbasis $\{\mathbf{h}_i\}$ bezeichnen wir jene Basis, in der H nur Diagonaleinträge aufweist. Dazu wollen wir eine Transformationsmatrix U finden, die H in Diagonalform bringt, d.h. $H^{\{\mathbf{h}_i\}} = U^{-1} H^{\{\mathbf{e}_i\}} U$.
Geben Sie explizit die Transformationsmatrix U an. Überprüfen Sie, dass U eine unitäre Matrix ist.

(d) Gegeben sei der Vektor

$$\mathbf{v} \xrightarrow{\{\mathbf{e}_i\}} \mathbf{v}^{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Transformieren Sie den Vektor $\mathbf{v}$ in die Eigenbasis von H, d.h. geben Sie $\mathbf{v}^{\{\mathbf{h}_i\}}$ an. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\mathbf{v}^\dagger H \mathbf{v}$ invariant bezüglich der gewählten Basis ist. Berechnen sie dazu explizit das Skalarprodukt in beiden Basen.

3. Die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[\phi(x)] = \bar{\phi}(k)$ einer Funktion $\phi(x)$ ist gegeben durch

$$\bar{\phi}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \phi(x) e^{-ikx}. \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie, dass die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}[\bar{\phi}(k)] = \phi(x)$ durch

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx} \bar{\phi}(k) \tag{7}$$

gegeben ist, d.h. $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\phi(x)]] = \phi(x)$.
Hinweis: Nutzen Sie dazu aus, dass $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx}$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Gaußkurve,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \tag{8}$$

wobei Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 1 verwenden können.

(c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Kastenfunktion

$$\phi(x) = \begin{cases} 1/(2\lambda), & |x| < \lambda, \\ 0, & \text{sonst.}, \end{cases} \tag{9}$$

wobei $\lambda > 0$. Diskutieren Sie den Limes $\lambda \to 0$.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2ab/2cd/3.