2. Tutorium VU Quantentheorie I, 20.10.2023

1. Ein Teilchen der Masse m und Gesamtenergie $E = -\hbar^2/(2ma^2)$ wird durch die Wellenfunktion

$$\psi(x) = Ne^{-|x|/a}\left(1 + \frac{|x|}{a}\right), \qquad a > 0 \tag{1}$$

beschrieben. Diese Wellenfunktion ist eine Lösung der eindimensionalen, zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit einem unbekannten Potential $V(x)$.

   (a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N, sodass $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 = 1$ gilt. *Hinweis*: Eine eventuell mühsame partielle Integration kann durch den Feynman-Trick vermieden werden.

   (b) Bestimmen Sie das Potential $V(x)$, für welches die Wellenfunktion $\psi(x)$ die Lösung der stationären Schrödingergleichung ist.

   (c) Skizzieren Sie $V(x)$ und $\psi(x)$ (z.B. mit Hilfe eines Computers) und überprüfen Sie, ob die Wellenfunktion überall differenzierbar ist. Was ist die Auswirkung auf das Potential, wenn $\psi(x)$ an einer Stelle nicht differenzierbar ist? Argumentieren Sie mit Hilfe der zeitunabhängigen Schrödingergleichung.

2. Betrachten Sie den unendlich tiefen Potentialtopf in *einer* Dimension,

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq x \leq L, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Die Eigenfunktionen des Potentialtopfs, d.h. die Lösungen der stationären Schrödingergleichung mit obigem Potential, lauten

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad n \in \mathbb{Z}^+, \tag{3}$$

für $x \in [0, L]$. Ein Teilchen der Masse m wird zum Zeitpunkt $t = 0$ durch folgende Superposition aus diesen Eigenzuständen beschrieben

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{8}{\sqrt{73}}\left[\psi_1(x) + \frac{3}{8}\psi_2(x)\right]. \tag{4}$$

   (a) Berechnen Sie, mit welchen Energien E_n die Eigenfunktionen ψ_n assoziiert sind, indem Sie die Eigenfunktionen in die zeitunabhängige Schrödingergleichung einsetzen. Geben Sie nun einen allgemeinen Ausdruck für die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ für alle Zeiten $t \geq 0$ an.

(b) Setzen Sie für diesen und den folgenden Unterpunkt: $\hbar = m = L = 1$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$ für den Zustand $\Psi(x,t)$. Zeigen Sie, dass beide Funktionen zeitperiodisch mit Periode $T = \frac{4}{3\pi}$ sind.

(c) Skizzieren Sie $\rho(x,t)$ und $j(x,t)$ (z.B. mit Hilfe eines Computers) für die Zeitpunkte $t/T = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im gegebenen physikalischen Kontext und nehmen Sie dabei insbesondere Bezug auf das Vorzeichen von $j(x,t)$ zu den jeweiligen Zeitpunkten.

3. Betrachten Sie den unendlich tiefen Potentialtopf in *zwei* Dimensionen,

$$V(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq x \leq L_x,\ 0 \leq y \leq L_y, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5}$$

(a) Zeigen Sie, dass mit Hilfe eines Separationsansatzes der Form

$$\Psi(x,y,t) = \psi(x,y)\chi(t), \tag{6}$$

die zeitabhängige Schrödingergleichung für obiges Potential,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,y,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + V(x,y)\right]\Psi(x,y,t), \tag{7}$$

in die stationäre Schrödingergleichung,

$$E\psi(x,y) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + V(x,y)\right]\psi(x,y), \tag{8}$$

übergeführt werden kann.

(b) Lösen sie die stationäre Schrödingergleichung, d.h. geben sie die Eigenfunktionen $\psi(x,y)$ mit den zugehörigen Eigenenergien E an. Nutzen Sie dazu einen weiteren Separationsansatz.

(c) Der Begriff *Entartung* beschreibt in der Quantenmechanik die Anzahl der linear unabhängigen Zustände (Wellenfunktionen), die mit derselben Energie assoziiert sind. Geben Sie den Grad der Entartung für den Grundzustand und die ersten beiden angeregten Zustände des zweidimensionalen Potentialtopfs an.
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $L_x = L_y$ und $L_x \neq L_y$.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2a/2bc/3.