# 3. Tutorium VU Quantentheorie I, 27.10.2023

1. Ein Teilchen der Masse $m$ wird im freien Raum durch die Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, a(k,t) e^{ikx}, \tag{1}$$

beschrieben, wobei die Gewichtungsfunktion $a(k,t)$ eine Lorentz-Verteilung sei,

$$a(k,t) = \frac{N\sigma}{\sigma^2 + k^2} e^{-i\omega_k t}, \qquad \sigma > 0. \tag{2}$$

*Hinweis*: Im Verlauf des Beispiels können sich Symmetrieargumente und der Residuensatz als nützlich erweisen.

(a) Geben Sie die Dispersionsrelation $\omega_k = \omega(k)$ für ein freies Teilchen an (ohne Rechnung). Bestimmen Sie danach die Normierungskonstante $N$.

(b) Berechnen Sie die Momente $\langle \hat{p} \rangle$ und $\langle \hat{p}^2 \rangle$ für den Impulsoperator $\hat{p} \xrightarrow{\{x\}} p^{\{x\}} = -i\hbar\partial_x$ und damit die Impulsunschärfe $\sigma_p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$ dieses Wellenpakets.

*Hinweis:* Der Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle$ für einen beliebigen Operator $\hat{A}$ in der Ortsbasis wird hier berechnet als $\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \Psi^*(x,t) \, A^{\{x\}} \, \Psi(x,t)$.

(c) Zeigen Sie, dass der Ortserwartungswert $\langle \hat{x} \rangle$ in der Form

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, a^*(k,t) i \frac{\partial}{\partial k} a(k,t) \tag{3}$$

dargestellt werden kann.

(d) Berechnen Sie die Momente $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{x}^2 \rangle$ für den Ortsoperator $\hat{x}$ und damit die Ortsunschärfe $\sigma_x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ dieses Wellenpakets. Nutzen Sie dafür, dass Sie analog zur Glg. (3) das zweite Moment $\langle \hat{x}^2 \rangle$ wie folgt berechnen können:

$$\left\langle \hat{x}^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, a^*(k,t) \left( i \frac{\partial}{\partial k} \right)^2 a(k,t) \tag{4}$$

Gleichung (4) muss dabei nicht bewiesen oder hergeleitet werden.

*Hinweis*: Sie können folgende Integrale verwenden:
$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \frac{1}{(k^2+\sigma^2)^3} = \frac{3\pi}{8\sigma^5}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \frac{k^2}{(k^2+\sigma^2)^3} = \frac{\pi}{8\sigma^3}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \frac{k^2}{(k^2+\sigma^2)^4} = \frac{\pi}{16\sigma^5}$.

(e) Zerfließt dieses Wellenpaket? Überprüfen Sie weiters, ob die Heisenberg'sche Unschärferelation für dieses Teilchen erfüllt ist. Erreicht das Teilchen jemals die minimale Unschärfe, d.h. gilt zu irgendeinem Zeitpunkt $\sigma_p \sigma_x = \hbar/2$?

2. Gegeben sei ein Teilchen der Masse $m$ in einem eindimensionalen, reellen Potential $V(x)$.

(a) Beweisen Sie, dass alle gebundenen Zustände nicht entartet sind, d.h. zu jeder Energie $E_n$ existiert nur ein (physikalisch unterscheidbarer) gebundener Zustand $\psi_{E_n}(x)$.

Gehen Sie für den Beweis zunächst davon aus, dass es zwei Zustände $\psi_{E_n,1}(x)$ und $\psi_{E_n,2}(x)$ zur selben Energie $E_n$ gibt, welche die stationäre Schrödingergleichung erfüllen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_{E_n,1}(x) + V(x)\psi_{E_n,1}(x) = E_n\psi_{E_n,1}(x), \tag{5}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_{E_n,2}(x) + V(x)\psi_{E_n,2}(x) = E_n\psi_{E_n,2}(x). \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass diese Annahme auf die Gleichung

$$\partial_x\left[\psi_{E_n,2}(x)\partial_x\psi_{E_n,1}(x) - \psi_{E_n,1}(x)\partial_x\psi_{E_n,2}(x)\right] = 0 \tag{7}$$

führt. Integrieren Sie nun Glg. (7) zweimal örtlich auf und zeigen Sie, dass sich $\psi_{E_n,1}(x)$ und $\psi_{E_n,1}(x)$ höchstens durch eine multiplikative Konstante unterscheiden und somit physikalisch identisch sind.
*Hinweis*: Nutzen Sie nach der ersten Integration, dass für gebundene Zustände immer gilt $\psi(x \to \pm\infty) = 0$, um die Integrationskonstante zu bestimmen. Beachten Sie vor der zweiten Integration außerdem, dass gilt $\partial_x \ln \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\partial_x f(x)}{f(x)} - \frac{\partial_x g(x)}{g(x)}$.

(b) Beweisen Sie, dass die Wellenfunktionen der gebundenen Zustände eines eindimensionalen, reellen Potentials $V(x)$ immer reell gewählt werden können.

Betrachten Sie für den Beweis die komplex konjugierte stationäre Schrödingergleichung und verwenden Sie das Ergebnis aus Unterpunkt (a).

3. Im vergangenen Tutorium haben Sie bereits die Differenzierbarkeit der Wellenfunktion für ein spezifisches Potential untersucht. Wir betrachten nun systematisch zwei Potentiale,

$$\text{(i) } V(x) = V_0\Theta(x - x_0), \qquad V_0 \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$\text{(ii) } V(x) = D\delta(x - x_0), \qquad D \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Untersuchen Sie Eigenzustände aus der stationären Schrödingergleichung,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x), \tag{10}$$

im Hinblick auf ihre Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit im Punkt $x_0$. Skizzieren Sie qualitativ die Funktionen $\psi(x)$, $\psi'(x)$ und $\psi''(x)$ um $x_0$. Untersuchen Sie weiters den Fall $V_0 \to \infty$.

*Hinweis*: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung Glg. (10) räumlich auf. Betrachten Sie dabei speziell die Umgebung $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ für kleines $\epsilon$ und nützen Sie die Stetigkeit der Wellenfunktion für Ihre Argumentation.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1ab/1cde/2/3.