4. Tutorium VU Quantentheorie I, 03.11.2023

1. Ein Teilchen der Masse m bewege sich auf einem eindimensionalen geschlossenen Ring des Umfangs L (ohne Potential).

   (a) Geben Sie die normierten Eigenzustände $\phi_n(x)$ der stationären Schrödingergleichung zur Eigenenergie E_n für ein solches Teilchen an. Achten Sie dabei auf die Verwendung der periodischen Randbedingung, $\phi(x+L) = \phi(x)$. Zeigen Sie, dass (fast) alle Eigenenergien zweifach entartet sind, d.h. dass einer Eigenenergie E_n jeweils zwei Eigenzustände zuordenbar sind. Welcher Zustand ist nicht entartet?

   (b) Die entarteten Zustände mit der gleichen Eigenenergie E spannen jeweils einen zweidimensionalen Unterraum auf. Zeigen Sie, dass jede Linearkombination aus Zuständen eines solchen Unterraums wiederum ein Eigenzustand mit Eigenenergie E ist.

   (c) Im letzten Tutorium haben Sie gezeigt, dass die Wellenfunktionen der gebundenen Zustände eines eindimensionalen, reellen Potentials immer reell gewählt werden können. Falls Sie die Eigenzustände bei (a) nicht ohnehin reell gewählt haben: Geben Sie reelle Eigenzustände $\psi_n(x)$ für das Teilchen im eindimensionalen Ring an.

   (d) Betrachten Sie nun die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ für die Anfangsbedingung $\Psi(x,0) = \psi_n(x)$ für ein gegebenes n, wobei $\psi_n(x) \in \mathbb{R}$ eine reellwertige Eigenfunktion sei. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$ zum Zustand $\Psi(x,t)$ für alle Zeiten t. Erläutern Sie Ihr Ergebnis physikalisch und überprüfen Sie, ob dieses für alle reellwertige Wellenfunktionen gilt.

   (e) Berechnen Sie analog zur Teilaufgabe (d) die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$ für den Anfangszustand

   $$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\phi_i(x) + i\phi_j(x)\right], \tag{1}$$

   wobei ϕ_i und ϕ_j die zwei reellen Eigenzustände zur selben Energie E_n sind, die Sie zuvor in (c) bestimmt haben. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe (d). Gibt es einen Unterschied? Wenn ja, wie interpretieren Sie diesen?

2. Wir betrachten ein Potential der Form

   $$V(x) = -D\delta(x), \quad D > 0. \tag{2}$$

   Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse der letzten Übung.

(a) Finden Sie die gebundenen Eigenzustände ($E < 0$).

(b) Geben Sie nun die Streuzustände ($E > 0$) an. Berechnen Sie die Transmissionsamplitude t und Reflektionsamplitude r sowie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $R = |r|^2$ und $T = |t|^2$ in Abhängigkeit der Energie.

(c) Nehmen Sie nun an, dass $V(x) = D\delta(x),\ D > 0$, gilt. Wie verändern sich die gebundenen Zustände? Was ändert sich für die Transmission/Reflektion?

3. Betrachten Sie ein von links (von $z = -\infty$) einfallendes Teilchen der Masse m und Energie $E = \hbar\omega > 0$, das am Potential

$$V(z) = \begin{cases} V_1, & \text{für } z \leq 0 \quad \text{(Bereich 1)}, \\ V_2, & \text{für } 0 < z < d \quad \text{(Bereich 2)}, \\ V_3, & \text{sonst} \quad \text{(Bereich 3)}, \end{cases} \tag{3}$$

streut, wobei $V_1 = 0$ (freier Raum) und $V_2, V_3 \in \mathbb{R}$, sowie $E > V_3$ und $d > 0$ gilt.

(a) Berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit T und die Reflektionswahrscheinlichkeit R als Funktion der Wellenvektoren k_1, k_2 und k_3. Zeigen Sie, dass R als

$$R = \left| \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} e^{2ik_2 d}}{1 + \alpha_{12}\alpha_{23} e^{2ik_2 d}} \right|^2, \quad \alpha_{ij} = \frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}. \tag{4}$$

geschrieben werden kann.
Hinweis: Beachten Sie, dass Reflektion und Transmission in der Quantenmechanik als Quotient aus dem einfallenden und auslaufenden (reflektierten bzw. transmittierten) Wahrscheinlichkeitsfluss definiert sind ($\rightarrow$ Flussnormierung).

(b) Geben Sie die (inverse) Dispersionsrelation $k_i(\omega)$ in den drei Bereichen an (ohne Rechnung). Skizzieren Sie $T(\omega)$, $R(\omega)$ und $T(\omega) + R(\omega)$ (z.B. mit Hilfe eines Computers) als Funktionen der Frequenz ω der einfallenden Welle. Interpretieren Sie deren Verlauf. Setzen Sie dazu $m = d = 1$ und wählen Sie $V_2 = -20$ und $V_3 = -10$.

(c) Erinnern Sie sich an das Beispiel 1 des 12. Übungsblattes aus EDYN 1 SS23. Dort haben Sie das äquivalente Problem zu Glg. (3) für elektromagnetische Maxwell-Wellen gelöst. Welche Dispersionsrelation wurde dort für die Maxwell-Wellen angenommen?
Hinweis: Vergleichen Sie den allgemeineren Ausdruck von α_{ij} in Glg. (4) mit dem spezifischen Ausdruck für Maxwell-Wellen in der EDYN-Angabe.
Anmerkung: Falls Sie die Übung nicht gerechnet haben, finden Sie die Angabe auf der nächsten Seite. Sie können die dort angegebenen Ergebnisse verwenden, ohne Sie zu beweisen. Beachten Sie, dass dort R als Reflektions*koeffizient* bezeichnet wird. In der Quantenmechanik würde man diese Größe als Reflektions*wahrscheinlichkeit* interpretieren.

(d) Skizzieren Sie $T(\omega)$, $R(\omega)$ und $T(\omega) + R(\omega)$ (z.B. mit Hilfe eines Computers) für Maxwell-Wellen als Funktionen der Frequenz ω der einfallenden Welle. Interpretieren Sie deren Verlauf. Setzten Sie dafür $n_1 = 1$ (freier Raum) und $n_2 = 6$, $n_3 = 3$ sowie $d = 1$.
Hinweis: Sie müssen $T(\omega)$ nicht explizit berechnen, sondern vergleichen Sie mit Unterpunkt (a).

(e) Allgemein kann man zeigen[1], dass $T(\omega)$ und $R(\omega)$ für Maxwell-Wellen und Schrödinger-Wellen übereinstimmen, wenn man folgende (energieabhängige!) Identifikation verwendet

$$n = \sqrt{1 - \frac{V}{E}}. \tag{5}$$

Begründen Sie mit Hilfe von Glg. (5), warum die Streuung an normalen Dielektrika ($n > 1$) jenen an endlichen Potentialtöpfen ($V < 0$) entspricht. Begründen Sie weiters, warum es zu keinem Tunneleffekt (in einem quantenmechanischen Sinn) für Maxwell-Wellen kommen kann.

(f) Untersuchen Sie das Reflektions- und Transmissionsverhalten für hohe Frequenzen sowohl für Schrödinger-Wellen als auch für Maxwell-Wellen. Stimmt die Hochfrequenz-Vorhersage mit der physikalischen Realität überein?

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2/3ab/3cdef.

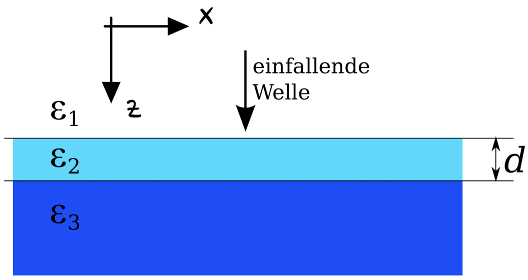
[1]Für eine Herleitung siehe: Rotter, Gigan. "Light fields in complex media: Mesoscopic scattering meets wave control", Seite 4 in `https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.89.015005` bzw. `https://arxiv.org/abs/1702.05395`

Übungsblatt 12

für das Tutorium am 16.06.2023,
Kreuzerldeadline 8:00

1. **Antireflexbeschichtung**

   Auf ein dielektrisches Medium mit Dielektrizitätskonstante ε_3 (Bereich 3) wird eine dünne Schicht der Dicke d eines Mediums mit Dielektrizitätskonstante ε_2 aufgedampft (Bereich 2). Eine monochromatische ebene elektromagnetische Welle falle senkrecht auf dieses Medium aus Bereich 1 mit Dielektrizitätskonstante ε_1 ein (siehe Skizze).



   (a) Zeige, dass das Verhältnis der Amplituden von auslaufender (E_1^-) und einlaufender (E_1^+) Welle im Bereich 1 gegeben ist durch

$$\frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} e^{2ik_2 d}}{1 + \alpha_{12}\alpha_{23} e^{2ik_2 d}} \quad \text{mit} \quad \alpha_{jk} := \frac{n_j - n_k}{n_j + n_k}.$$

   Hinweis: Die einfallende Welle kann als in x-Richtung linear polarisiert angenommen werden. Setze im Bereich 1 und 2 ein- und auslaufende ebene Wellen an. Verwende dazu Amplituden E_1^+, E_1^- mit Wellenzahl $\pm k_1$ und E_2^+, E_2^- mit $\pm k_2$. Im Bereich 3 kann eine auslaufende ebene Welle mit Amplitude E_3^+ und Wellenzahl $+k_3$ angenommen werden. Alle Amplituden $E_i^\pm$, $i \in \{1, 2, 3\}$ sollen als in x-Richtung zeigend angenommen werden. Zeige, dass die Anschlussbedingungen bei $z = 0$ und $z = d$ zu der angegebenen Formel führen.

   (b) Der Reflexionskoeffizient R ist gegeben durch

$$R = \frac{|E_1^-|^2}{|E_1^+|^2}.$$

   Wie muss man die Dicke d und die Materialkonstante ε_2 der aufgedampften Schicht wählen, damit überhaupt kein Licht reflektiert wird?

   Hinweis: Punkt (b) lässt sich auch ohne Herleitung des Ergebnisses aus (a) lösen. Nimm den Ausdruck für E_1^-/E_1^+ aus (a) als gegeben an.