5. Tutorium VU Quantentheorie I, 10.11.2023

1. Die Quantenphysik eines Interferometers für Photonen lässt sich im zweidimensionalen Hilbertraum mit den orthonormalen Basisvektoren $|a\rangle$ und $|b\rangle$ modellieren. Das Interferometer besteht aus zwei Beamsplittern (BS), zwei Spiegeln (S), einem Kristall (K) sowie zwei Photonen-Detektoren (siehe Abbildung 1). Der Zustand $|a\rangle$ (für *above*) steht für ein Photon, das sich oberhalb der Beamsplitter befindet und der Zustand $|b\rangle$ (für *below*) für ein Photon, das sich unterhalb der Beamsplitter befindet. Dementsprechend benennen wir auch die Wahrscheinlichkeit, dass der obere Detektor ein Photon registriert P_a und die Wahrscheinlichkeit, dass der untere Detektor ein Photon registriert P_b. Der Zustand des Photons am Input (vor dem ersten Beamsplitter) wird mit $|\psi_\mathrm{i}\rangle = |b\rangle$ (für *initial*) beschrieben, weil das Licht von unten eingeschossen wird und sich das Photon zunächst unten befindet. Nach dem zweiten Beamsplitter und noch vor den Detektoren ist der Zustand $|\psi_\mathrm{f}\rangle$ (für *final*) gegeben durch

$$|\psi_\mathrm{f}\rangle = \hat{U}_\mathrm{BS}\hat{U}_\mathrm{K}\hat{U}_\mathrm{BS}\,|\psi_\mathrm{i}\rangle\,. \tag{1}$$

Die Entwicklung des Zustandes durch den Beamsplitter und durch den Kristall wird durch die unitären Operatoren

$$\hat{U}_\mathrm{K} = e^{i\phi}\,|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\,, \tag{2}$$

$$\hat{U}_\mathrm{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle\langle a| + |a\rangle\langle b| - |b\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\right) \tag{3}$$

beschrieben. Hier ist ϕ die zusätzliche Phase, die vom Photon beim Durchgang durch den Kristall akkumuliert wird.
Hinweis: Dieses Beispiel ist als Übung zur Braket-Notation gedacht und deshalb so konzipiert, dass man es basisunabhängig lösen kann.

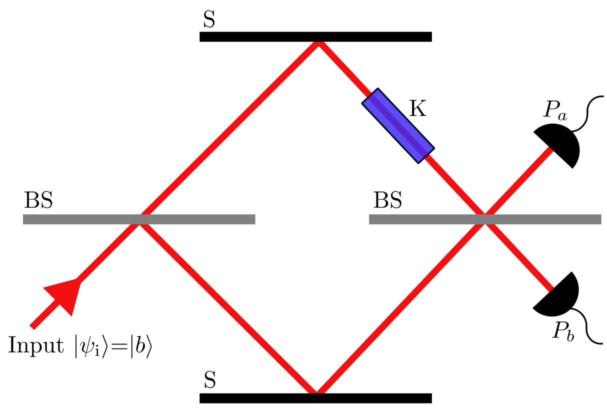

Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Interferometers für Teilaufgabe 1(a) und 1(b).

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, das Photon bei Detektor a bzw. bei Detektor b zu finden, d.h. berechnen Sie

$$P_a = |\langle a|\psi_\mathrm{f}\rangle|^2, \tag{4}$$
$$P_b = |\langle b|\psi_\mathrm{f}\rangle|^2. \tag{5}$$

(b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit das Photon

   (i) mit Wahrscheinlichkeit 1 im unteren Detektor detektiert wird.

   (ii) mit gleicher Wahrscheinlichkeit oberhalb bzw. unterhalb detektiert wird.

(c) Der untere Pfad im Interferometer wird nun mit einem lichtundurchlässigen Kristall geblockt (siehe Abbildung 2). Jedes detektierte Photon muss also den oberen Lichtpfad genommen haben. Dementsprechend werden beide Kristalle gemeinsam durch den Operator

$$\hat{U}'_\mathrm{K} = e^{i\phi}\,|a\rangle\langle a| \tag{6}$$

beschrieben. Nach dem zweiten Beamsplitter und noch vor den Detektoren ist der Zustand nun gegeben durch

$$|\psi_\mathrm{f}\rangle = \hat{U}_\mathrm{BS}\hat{U}'_\mathrm{K}\hat{U}_\mathrm{BS}\,|\psi_\mathrm{i}\rangle\,. \tag{7}$$

Berechnen Sie für diesen Fall analog zur Teilaufgabe (a) die Wahrscheinlichkeiten P_a und P_b. Ist es auch hier möglich, dass das Photon mit Wahrscheinlichkeit 1 im unteren Detektor gemessen wird?

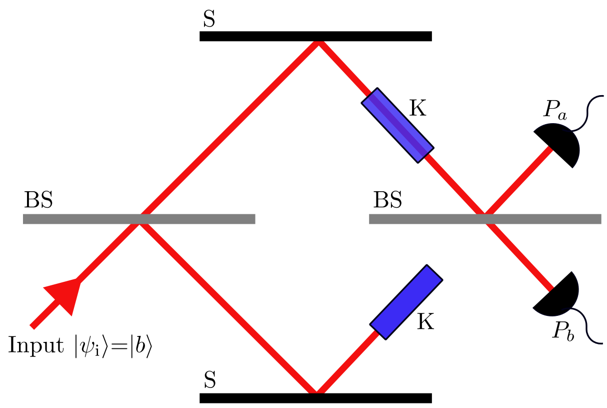

Abbildung 2: Schematischer Aufbau des Interferometers für Teilaufgabe 1(c).

2. Um die Wechselwirkung von Atomen mit (klassischem) Licht zu beschreiben, reicht es häufig aus, nur zwei Zustände zu betrachten. Wir bezeichnen diese als den Grundzustand $|\mathrm{g}\rangle$ und den angeregten Zustand $|\mathrm{e}\rangle$. Die Zustände $|\mathrm{g}\rangle$ und $|\mathrm{e}\rangle$ sind dabei (orthonormale) Energieeigenzustände des freien Atoms, und alle Zustände höherer Energie werden vernachlässigt – man spricht von einem Zwei-Level-System (ZLS). Der Zustand des ZLS lässt sich im Rahmen der Approximation zu jedem Zeitpunkt als $|\Psi(t)\rangle = c_{\mathrm{g}}(t)\,|\mathrm{g}\rangle + c_{\mathrm{e}}(t)\,|\mathrm{e}\rangle$ schreiben.

   (a) Zeigen Sie, dass aus der Normierung von $|\Psi(t)\rangle$ die Gleichung $|c_{\mathrm{g}}(t)|^2 + |c_{\mathrm{e}}(t)|^2 = 1$ folgt.

   (b) Wir betrachten zunächst ein freies ZLS, das durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird,

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(-\,|\mathrm{g}\rangle\langle\mathrm{g}| + |\mathrm{e}\rangle\langle\mathrm{e}|), \tag{8}$$

   wobei $\omega > 0$ die Übergangsfrequenz des ZLS sei. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das ZLS im

   (i) Grundzustand $|\Psi(0)\rangle = |\mathrm{g}\rangle$,

   (ii) im Superpositionszustand $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\mathrm{g}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\mathrm{e}\rangle$.

   Geben Sie gemäß der Schrödingergleichung $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\Psi(t)\rangle$ jeweils die Zeitentwicklung $|\Psi(t)\rangle$ an.

   (c) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit $P = |\,\langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle\,|^2$, das ZLS zur Zeit t wieder im Anfangszustand zu finden?

   (d) Das ZLS wird nun einem Lichtfeld ausgesetzt, dessen Stärke durch den Parameter $\Omega \in \mathbb{R}$ parametrisiert sei. In der ZLS-Approximation lautet der Hamiltonoperator mit dem Lichtfeld

$$\hat{H}' = \frac{\hbar\omega}{2}(-\,|\mathrm{g}\rangle\langle\mathrm{g}| + |\mathrm{e}\rangle\langle\mathrm{e}|) + \hbar\Omega(|\mathrm{g}\rangle\langle\mathrm{e}| + |\mathrm{e}\rangle\langle\mathrm{g}|), \tag{9}$$

   d.h. das Lichtfeld treibt den Übergang $|\mathrm{g}\rangle \leftrightarrow |\mathrm{e}\rangle$. Verifizieren Sie, dass es sich um einen hermiteschen Operator handelt.

   (e) Um die Rechnungen einfach zu halten setzen wir nachfolgend $\omega = 0$ (Physikalisch bedeutet das, dass das ZLS ohne Lichtfeld entartet ist). Zeigen Sie für diesen Fall explizit, dass die Eigenzustände von $\hat{H}'$ durch

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{g}\rangle + |\mathrm{e}\rangle),\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{g}\rangle - |\mathrm{e}\rangle) \tag{10}$$

   gegeben sind und berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte. Die Differenz aus den beiden Eigenwerten wird als 'Rabi-Splitting' bezeichnet und wird allein durch das Lichtfeld erzeugt. Die Eigenzustände in Gleichung (10) werden als 'Dressed States' bezeichnet.

(f) Wir wollen abschließend berechnen, wie sich ein ZLS im Grundzustand $|\mathrm{g}\rangle$ verhält, wenn ein Lichtfeld eingeschaltet wird. Berechnen Sie dazu die Zeitentwicklung $|\Psi(t)\rangle$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}'$ für den Anfangszustand $|\Psi(0)\rangle = |\mathrm{g}\rangle$. Nutzen Sie, dass Sie den Anfangszustand auf die Eigenbasis des Hamiltonoperators projizieren können. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_\mathrm{e}(t) = |c_\mathrm{e}(t)|^2 = |\langle e|\Psi(t)\rangle|^2$ und $P_\mathrm{g}(t) = |c_\mathrm{g}(t)|^2 = |\langle g|\Psi(t)\rangle|^2$ als Funktion der Zeit. Glückwunsch! Sie haben (hoffentlich) die bekannten Rabi-Oszillationen gefunden, die durch ein Lichtfeld induziert werden.

3. Ein Teilchen im Potential eines eindimensionalen harmonischen Oszillators $V(x) = (m\omega^2 x^2)/2$ sei zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$\Psi(x,0) = N\left[4\psi_0(x) + 5\psi_1(x)\right]. \tag{11}$$

Dabei ist $\psi_0(x)$ der Grundzustand, und $\psi_1(x)$ der erste angeregte Zustand. Diese Zustände sind orthonormal und können wie folgt angeschrieben werden:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}, \tag{12}$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} x\, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}. \tag{13}$$

Für die zugehörigen Energien E_0 und E_1 gilt:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad \text{und} \quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega. \tag{14}$$

a) Normieren Sie die Wellenfunktion $\Psi(x,0)$ und bestimmen Sie anschließend $\Psi(x,t)$ bzw. $|\Psi(x,t)|^2$ für einen späteren Zeitpunkt $t > 0$.

b) Berechnen Sie nun $\langle\hat{x}(t)\rangle$ sowie $\langle\hat{p}(t)\rangle$ für die in (a) gefundene Wellenfunktion $\Psi(x,t)$.

c) Das Ehrenfest-Theorem lässt sich wie folgt anschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{p}(t)\rangle = -\langle\frac{\partial}{\partial x}V(x)\rangle \tag{15}$$

Zeigen Sie, dass das Ehrenfest-Theorem für $\Psi(x,t)$ erfüllt ist. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch, indem Sie eine Analogie zur klassischen Physik ziehen.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2abc/2def/3.