6. Tutorium VU Quantentheorie I, 24.11.2023

1. Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ eines physikalischen Systems sei in einem 3-dimensionalen Hilbertraum durch seine Wirkung auf eine orthonormale Basis $\{|\phi\rangle\} = \{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ gegeben durch

$$\hat{H}|\phi_1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle, \quad \hat{H}|\phi_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle - |\phi_3\rangle), \quad \hat{H}|\phi_3\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle. \tag{1}$$

   (a) Bestimmen Sie die Darstellung $H^{\{\phi\}}$ des Operators $\hat{H}$ in der Basis $\{|\phi\rangle\}$.

   (b) Welche möglichen Messwerte für die Energie gibt es in diesem System?

   (c) Es sei $|\mathrm{g}\rangle$ der energetische Grundzustand des Systems. Bestimmen Sie die Darstellung des Vektors $|\mathrm{g}\rangle$ in der Basis $\{|\phi\rangle\}$. Stellen Sie außerdem $|\mathrm{g}\rangle$ als Linearkombination der Vektoren $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ dar.

   (d) Bestimmen Sie die Darstellung des Projektors $\hat{P}_\mathrm{g} = |\mathrm{g}\rangle\langle\mathrm{g}|$ in der Basis $\{|\phi\rangle\}$.

   (e) Das System befinde sich im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle + i|\phi_3\rangle). \tag{2}$$

   Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\psi|\hat{P}_\mathrm{g}|\psi\rangle$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im gegebenen physikalischen Kontext.
   Hinweis: Es ist instruktiv die Rechnung einmal mit Hilfe der Braket-Schreibweise und einmal in Vektor/Matrix-Schreibweise in der Basis $\{|\phi\rangle\}$ durchzuführen. Bestimmen Sie dazu die Darstellung des Vektors $|\psi\rangle$ in der Basis $\{|\phi\rangle\}$ und verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Unterpunkt (d).

   (f) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie für den Zustand $|\psi\rangle$.

2. In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum sind der Operator $\hat{A}$ und der Operator $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die orthonormierten Basiszustände $|\phi_i\rangle$ gegeben:

$$\begin{aligned}
\hat{A}|\phi_1\rangle &= 6|\phi_1\rangle + i\sqrt{8}|\phi_2\rangle + 2|\phi_3\rangle, & \hat{B}|\phi_1\rangle &= |\phi_1\rangle - i\sqrt{2}|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle, \\
\hat{A}|\phi_2\rangle &= -i\sqrt{8}|\phi_1\rangle + 4|\phi_2\rangle + i\sqrt{8}|\phi_3\rangle, & \hat{B}|\phi_2\rangle &= i\sqrt{2}|\phi_1\rangle - i\sqrt{2}|\phi_3\rangle, \\
\hat{A}|\phi_3\rangle &= 2|\phi_1\rangle - i\sqrt{8}|\phi_2\rangle + 6|\phi_3\rangle, & \hat{B}|\phi_3\rangle &= |\phi_1\rangle + i\sqrt{2}|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle.
\end{aligned}$$

   (a) Schreiben Sie die Matrizen $A^{\{\phi\}}$ und $B^{\{\phi\}}$ an, die den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ entsprechen.

   (b) Untersuchen Sie, ob die beiden Observablen A und B gleichzeitig scharf gemessen werden können.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{A}$ und $\hat{B}$, deren Entartungsgrad, sowie ein Orthonormalsystem $\{|c\rangle\} = \{|c_1\rangle, |c_2\rangle, |c_3\rangle\}$ *gemeinsamer* Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

(d) Wie lauten die möglichen Messwertpaare, die bei einer gleichzeitigern Messung der beiden Observablen auftreten können?

(e) Welche Matrizen $A^{\{c\}}$ und $B^{\{c\}}$ sind den beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|c\rangle\}$ zugeordnet? Berechnen Sie die Spur der Matrizen in den Basen $\{|\phi\rangle\}$ und $\{|c\rangle\}$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

3. In diesem Beispiel wollen wir im Rahmen des *Quanten-Zeno-Effekts* (`https://de.wikipedia.org/wiki/Quanten-Zeno-Effekt`) die Wirkung wiederholter Messungen auf ein Quantensystem betrachten. Dazu betrachten wir das Zwei-Level-System (ZLS), das wir bereits auf dem vorangehenden Übungsblatt kennengelernt haben. Wir nehmen an, dass wir die Observablen

$$\hat{P}_{\mathrm{g}} = |\mathrm{g}\rangle\langle\mathrm{g}| \quad \text{und} \quad \hat{P}_{\mathrm{e}} = |\mathrm{e}\rangle\langle\mathrm{e}| \tag{3}$$

messen können. Wie in Teilaufgabe 2(e) des 5. Tutoriums nehmen wir zudem an, dass das ZLS sich in einem Lichtfeld konstanter Stärke Ω befindet (und setzen die Übergangsfrequenz $\omega = 0$, siehe Tutorium 5), d.h. es entwickelt sich mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}' = \hbar\Omega(|\mathrm{g}\rangle\langle\mathrm{e}| + |\mathrm{e}\rangle\langle\mathrm{g}|) \tag{4}$$

in der Zeit.

(a) Nehmen Sie an, dass das ZLS zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\mathrm{g}\rangle$ präpariert ist. Die Observablen $\hat{P}_{\mathrm{e}}$ und $\hat{P}_{\mathrm{g}}$ sollen nun zum Zeitpunkt $t = T$ am ZLS gemessen werden. Geben Sie auf der Basis Ihrer Rechnungen im vergangenen Tutorium den Zustand unmittelbar vor der Messung an.

(b) Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das ZLS im Zustand $|\mathrm{g}\rangle$ oder $|\mathrm{e}\rangle$ gemessen wird. Geben Sie zudem den Zustand unmittelbar nach der Messung an (bedingt durch das jeweilige Messergebnis).

(c) Wir nehmen nun an, dass wir anstatt einer Messung zum Zeitpunkt T mehrere Messungen in regelmäßigen Zeitintervallen $\Delta t = T/n$, $n \in \mathbb{N}$ am ZLS durchführen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, bei allen n Messungen, das Teilchen im Grundzustand zu finden. Was bedeutet für gegebenes T, Ω der Fall $n \gg 1$ für die im letzten Tutorium gefundenen Rabi-Oszillationen?

(d) Schätzen Sie für eine gegebene Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ die minimale Anzahl an Messungen n ab, für die man das ZLS mit Wahrscheinlichkeit $P > 1 - \varepsilon$ bei allen Messungen im Grundzustand $|\mathrm{g}\rangle$ findet. Nehmen Sie dazu $n \gg 1$ an.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2abc/2de/3.