8. Tutorium VU Quantentheorie I, 15.12.2023

korrigierte Version (Normierung in Bsp. 2)

1. Sie haben in der Vorlesung kohärente Zustände kennengelernt als

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0} c_n |n\rangle , \quad \text{mit} \quad c_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \tag{1}$$

Eine häufig verwendete alternative Definition von kohärenten Zuständen lautet

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle , \quad \text{mit} \quad \hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \tag{2}$$

wobei $\hat{D}(\alpha)$ als Verschiebeoperator (*displacement operator*) bekannt ist. Wie üblich ist das Operator-Exponential über seine Reihenentwicklung definiert. Wir wollen zunächst beweisen, dass beide Definitionen des kohährenten Zustands äquivalent sind.

(a) Überprüfen Sie, dass $\hat{D}(\alpha)$ alternativ geschrieben werden kann als

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}. \tag{3}$$

Nutzen Sie dazu aus, dass für zwei beliebige Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt: $\exp(\hat{A}+\hat{B}) = \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})\exp(-[\hat{A},\hat{B}]/2)$, vorausgesetzt $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ (ohne Beweis).

(b) Überprüfen Sie weiters, dass die folgenden beiden Relationen gelten

$$\langle 0|e^{-\alpha^* \hat{a}}|0\rangle = 1, \tag{4}$$

$$\langle 0|e^{\alpha^* \hat{a}}|n\rangle = \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}. \tag{5}$$

(c) Zeigen Sie nun mit Hilfe Ihrer Ergebnisse aus Unterpunkt (b), dass gilt

$$\langle n|\hat{D}(\alpha)|0\rangle = c_n, \tag{6}$$

und damit, dass beide Definitionen für kohärente Zustände äquivalent sind.

(d) Aus dem letzten Tutorium wissen wir, dass $-\sqrt{2} i\hat{p}/p_{\mathrm{s}} = \hat{a}^\dagger - \hat{a}$ gilt. Nehmen wir für diesen Unterpunkt an, dass α reell ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Verschiebeoperator einen Zustand $\psi(x)$ im Ortsraum um $\sqrt{2}\alpha x_{\mathrm{s}}$ verschiebt, das heißt

$$\langle x|\hat{D}(\alpha)|\psi\rangle = \psi(x - \sqrt{2}\alpha x_{\mathrm{s}}). \tag{7}$$

Hinweis: Fügen Sie ein vollständige Eins ein, $1 = \int \mathrm{d}p\, |p\rangle\langle p|$, und verwenden Sie $\exp(-i\hat{p}\chi)\,|p\rangle = \exp(-ip\chi)\,|p\rangle$.

(e) Aus dem letzten Tutorium wissen wir, dass $\sqrt{2}\hat{x}/x_\mathrm{s} = \hat{a}^\dagger + \hat{a}$ gilt. Nehmen wir für diesen Unterpunkt an, dass α rein imaginär ist, also $i\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Verschiebeoperator einen Zustand $\psi(p)$ im Impulsraum um $\sqrt{2}\alpha p_\mathrm{s}$ verschiebt, das heißt

$$\langle p|D(\alpha)|\psi\rangle = \psi(p - \sqrt{2}\alpha p_\mathrm{s}). \tag{8}$$

Hinweis: Fügen Sie ein vollständige Eins ein, $1 = \int \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|$, und verwenden Sie $\exp(i\hat{x}\rho)\,|x\rangle = \exp(ix\rho)\,|x\rangle$.

(f) Im Allgemeinen kann man zeigen, dass für ein beliebiges komplexes $\alpha \in \mathbb{C}$ der Verschiebeoperator $\hat{D}(\alpha)$ einen Zustand in eine Richtung, die von der Phase $\arg(\alpha)$ abhängt, um einen Abstand proportional zu $|\alpha|$ in der $x - p$ Ebene (d.h. im Phasenraum) verschiebt. Bringen Sie diese Ergebnisse mit den in der Vorlesung hergeleiteten Erwartungswerten für kohärente Zustände

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{2}x_\mathrm{s}\,\mathrm{Re}\{\alpha\}, \tag{9}$$

$$\langle\hat{p}\rangle = \sqrt{2}p_\mathrm{s}\,\mathrm{Im}\{\alpha\}, \tag{10}$$

in Verbindung (keine Rechnung erforderlich).

2. Lösen Sie die folgenden Unteraufgaben (a) und (b) unter Verwendung der Indexschreibweise mit Einstein'scher Summenkonvention.

(a) Beweisen Sie die Beziehung $\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = i\hbar\hat{\mathbf{L}}$.

(b) Wir betrachten nun ein System aus zwei Teilchen, wobei jedes Teilchen seinen eigenen Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}}_1$ bzw. $\hat{\mathbf{L}}_2$ hat. Zeigen Sie, dass auch $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}_1 + \hat{\mathbf{L}}_2$ ein Drehimpulsoperator ist, d.h., dass $\hat{\mathbf{L}}$ die Beziehung aus Unterpunkt (a) erfüllt.

Wir betrachten nun ein System mit den Eigenzuständen $|l, m\rangle$, das durch die Bahndrehimpulsquantenzahl l und die magnetische Drehimpulsquantenzahl m charakterisiert wird. Die Bahndrehimpulsquantenzahl l sei mit $l = 1$ fixiert.

(c) Finden Sie die Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$ in der gemeinsamen Eigenbasis von $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$. Gehen Sie dabei von folgenden Beziehungen aus:

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \tag{11}$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y \tag{12}$$

(d) Gegeben sei ein System im folgenden Zustand:

$$|\psi\rangle = \sum c_i\,|l, m\rangle = \frac{1}{3}\,|1, 1\rangle + \frac{2}{3}\,|1, 0\rangle + \frac{2}{3}\,|1, -1\rangle \tag{13}$$

Ermitteln Sie unter Verwendung der im Unterpunkt (c) ermittelten Matrixdarstellung von $\hat{L}_x$, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Messung mit dem $\hat{L}_x$-Operator am Zustand $|\psi\rangle$ das Messergebnis null liefert.

3. Gegeben sei ein Teilchen im $\mathbb{R}^3$, das durch die Wellenfunktion

$$\psi(x, y, z) = N\,(x + y + z)\,e^{-(r/a)^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad a, N \in \mathbb{R}$$

beschrieben wird.

   a) Bestimmen Sie mit welchen Wahrscheinlichkeiten alle für diese Wellenfunktion möglichen Messwerte der Observablen $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ auftreten? Stellen Sie dazu die Winkelverteilung der Wellenfunktion $\psi(x, y, z)$ mit Hilfe der entsprechenden Kugelflächenfunktionen dar.
   b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_x \rangle$, $\langle \hat{L}_y \rangle$, $\langle \hat{L}_z \rangle$ für den gegebenen Zustand.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1abc/1def/2/3.