9. Tutorium VU Quantentheorie I, 12.1.2024

1. Wir betrachten die Wellenfunktion eines wasserstoffartigen Atoms:

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{81}\sqrt{\frac{2Z^3}{\pi a_0^3}}\left(6 - Z\frac{r}{a_0}\right) Z\frac{r}{a_0} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} \cos(\theta) \tag{1}$$

wobei a_0 der Bohr'sche Radius ist.

   (a) Ermitteln Sie die der Wellenfunktion $\psi(r,\theta)$ entsprechenden Werte der Quantenzahlen n, l und m.

   (b) Geben Sie die Wellenfunktion an, welche dem Zustand mit denselben Quantenzahlen n und m, aber einer anderen Drehimpulsquantenzahl $l-1$ zugeordnet ist.

   (c) Berechnen Sie für die Wellenfunktionen aus Teilaufgabe (a) und (b) jeweils jenen Radius $\tilde{r}$, für den die Wahrscheinlichkeitsdichte das globale Maximum annimmt. Dieser Radius wird als *wahrscheinlichster Abstand* des Elektrons bezeichnet.
   Hinweis: Die Funktionaldeterminante ist in die Wahrscheinlichkeitsdichte zu inkludieren (vlg. Abbildung 35 im Skriptum).

   (d) Zeigen Sie nun allgemein, dass alle Zustände mit maximaler Drehimpulsquantenzahl $l = n-1$ die Vorhersage des Bohr'schen Atommodells $\tilde{r}_{\text{Bohr}} = a_0 n^2/Z$ exakt erfüllen.

2. Wir betrachten das Elektron eines Wasserstoffatoms, dessen Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 durch folgende Wellenfunktion beschrieben wird:

$$|\psi\rangle = A\left[4\,|1\;0\;0\rangle + |2\;0\;0\rangle - \sqrt{2}i\,|2\;1\;0\rangle + |2\;1\;{-1}\rangle + (1+2i)\,|3\;2\;1\rangle\right],$$

wobei $|n\;l\;m\rangle$ die Energieeigenfunktionen des Wasserstoffatomes bezeichnen. Normieren Sie $|\psi\rangle$ und berechnen Sie für den Zeitpunkt t_0:

   (a) die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung der Energie den Messwert

$$E_n = \frac{-\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

   zu finden,

   (b) den Erwartungswert der Energie.

   (c) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Bahndrehimpulsquadrates L^2 den Messwert $b_l = \hbar^2\, l(l+1)$ für beliebiges $l \in \mathbb{N}_0$ zu finden.

   (d) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z-Komponente des Bahndrehimpulses den Messwert $-\hbar$ zu finden,

   (e) den Erwartungswert der z-Komponente des Bahndrehimpulses.

(f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Messgrößenpaares $\{E, L^2\}$ das Messwertpaar $\{-\hbar^2/(8ma_0^2), 2\hbar^2\}$ zu finden. Hängt das Ergebnis davon ab, ob *zuerst* die Energie und *unmittelbar darauf* das Bahndrehimpulsquadrat oder umgekehrt gemessen wird?

(g) Überlegen Sie, was man für die in (a) bis (e) errechneten Größen erhält, wenn als Messzeitpunkt nicht t_0, sondern $t > t_0$ gewählt wird. (Keine Rechnung erforderlich.)

3. Wir betrachten ein Elektron der Masse m und Ladung $-|e|$ in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = (B_0, B_0, 0)^{\mathrm{T}}/\sqrt{2}$.

(a) Geben Sie den Hamiltonoperator für die Wechselwirkung von Spin und Magnetfeld an. Vernachlässigen Sie dabei die Ortsanteile im Hamiltonoperator. Geben Sie insbesondere die Darstellung in der $\hat{S}_z$-Eigenbasis an.
Hinweis: Das magnetische Moment des Elektrons ist gegeben durch $\mu = -|e|\mathbf{S}/m$ und es ist hilfreich die Larmorfrequenz $\omega_{\mathrm{L}} = eB_0/m$ zu definieren.

(b) Nehmen Sie nun an, dass sich das Elektron zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle \xrightarrow{\{\hat{S}_z\}} (1,0)^{\mathrm{T}}$ befindet. Bestimmen Sie den Zustand in der $\hat{S}_z$-Basis für alle Zeiten $t > 0$.

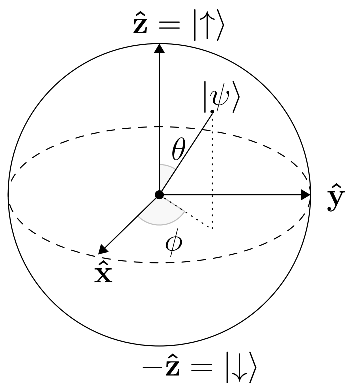

Abbildung 1: Darstellung eines beliebigen Spinzustands auf der Bloch-Kugel.

Der Spinzustand (ohne räumliche Freiheitsgrade) eines Elektrons kann stets durch den sogenannten Bloch-Vektor beschrieben werden (siehe Abb. 1),

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\,|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)\,|\downarrow\rangle\,, \tag{2}$$

wobei $\theta \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$.

(c) Grundsätzlich könnte man annehmen, dass ein Spinzustand $|\psi\rangle = (\alpha + i\beta)\,|\uparrow\rangle + (\delta + i\gamma)\,|\downarrow\rangle$ durch 4 reelle Parameter $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ beschrieben wird. Warum genügen zur physikalisch vollständigen Beschreibung jedoch die beiden Winkel θ, ϕ?

(d) Mit den beiden Winkeln θ, ϕ kann ein beliebiger Punkt auf der Einheitssphäre beschrieben werden, d.h. ein beliebiger Spinzustand kann auf dieser sogenannten *Bloch-Kugel* dargestellt werden. Zeichnen Sie für $|\psi(t)\rangle$ aus Teilaufgabe (b) die entsprechende Trajektorie auf der Bloch-Kugel.

(e) Nach welcher minimalen Zeit finden Sie den Spin im Zustand $|\downarrow\rangle \xrightarrow{\{\hat{S}_z\}} (0,1)^{\mathrm{T}}$?

(f) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Resultaten aus Aufgabe 2 des 5. Tutoriums.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2/3ab/3cdef.