10. Tutorium VU Quantentheorie I, 19.1.2024

1. Wir betrachten ein Systems von zwei (unterscheidbaren) Spins $s = 1/2$, welche unter dem Einfluss eines Magnetfeldes $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ mit $B > 0$ stehen und eine ferromagnetische Wechselwirkung aufweisen. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} - \frac{4\beta}{\hbar^2}\hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)},$$

wobei $\beta > 0$, $\hat{\mathbf{S}}^{(i)}$ der Spinoperator zum Spin i, $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(2)}$ das magnetische Moment des Gesamtspins $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}}^{(1)} + \hat{\mathbf{S}}^{(2)}$ und $\mathbf{e}_z$ der Einheitsvektor in z-Richtung ist. Es gilt $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(i)} = -\gamma\hat{\mathbf{S}}^{(i)}$ mit dem gyromagnetischen Verhältnis $\gamma > 0$.
Hinweis: Eine Clebsch-Gordan-Tabelle finden Sie im Skriptum oder bei der Particle Data Group.

   (a) Zeichnen Sie die Punktdiagramme der Drehimpulsaddition für die beiden Spins sowohl in der j/m_j als auch in der $m_s^{(1)}/m_s^{(2)}$-Ebene und verbinden Sie in beiden Diagrammen Zustände mit konstantem m_j durch Linien.

   (b) Schreiben Sie nun den Hamiltonoperator H in der gekoppelten Basis $\{(\hat{\mathbf{S}}^{(1)})^2, (\hat{\mathbf{S}}^{(2)})^2, \hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z\}$ an. Geben Sie alle Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenvektoren von H an.
   Hinweis: Verwenden Sie die gekoppelte Basis $\{|j, m_j\rangle\}$.

   (c) Wie lautet der Grundzustand in der Produktbasis $\{\,|m_s^{(1)}, m_s^{(2)}\rangle\}$?

   (d) Nehmen Sie an, das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\,|-1/2, +1/2\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\,|-1/2, -1/2\rangle\,, \tag{1}$$

   gegeben in der Produktbasis $\{\,|m_s^{(1)}, m_s^{(2)}\rangle\}$. Geben Sie die Zeitentwicklung des Zustands $|\chi\rangle$ für einen späteren Zeitpunkt $t > 0$ an.

   (e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür bei einer Messung von $\hat{\mathbf{J}}^2$ an $|\chi\rangle$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \geq 0$ den Wert $2\hbar^2$ zu erhalten.

   (f) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\chi(t)|\hat{J}_z|\chi(t)\rangle$ für einen späteren Zeitpunkt $t > 0$.

2. In dieser Aufgabe wollen wir einen eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2\,, \tag{2}$$

mit einem linearen Störterm,

$$\hat{H}_1 = -\lambda\sqrt{2m\hbar\omega^3}\hat{x}, \tag{3}$$

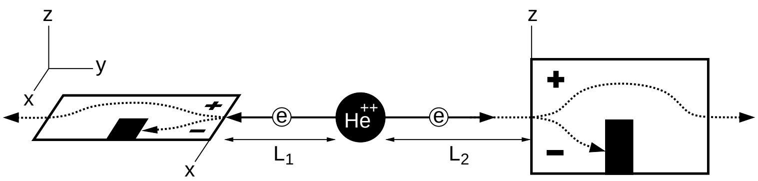
betrachten.

(a) Die zeitunabhängige Schrödingergleichung kann für den Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ exakt gelöst werden. Zeichnen Sie das Potential für ein $\lambda \neq 0$ und geben Sie für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ die Energieeigenwerte E_n und Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ an. Sie können dabei das Spektrum und die Eigenfunktionen von H_0 als bekannt voraussetzen.

(b) Wir wollen nun $\hat{H}_1$ als Störung betrachten und den Hamiltonoperator im Rahmen der Störungstheorie analysieren. Bestimmen Sie dazu die Energieeigenwerte des gestörten Systems in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie.
Hinweis: Die Verwendung von Leiteroperatoren kann vorteilhaft sein.

(c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben (a) und (b). Entsprechen die Ergebnisse Ihren Erwartungen? Begründen Sie.

3. Im Grundzustand des Heliumatoms befinden sich die beiden Elektronen in einem Singlett-Zustand mit Gesamtspin $s = 0$. Das Atom werde nun durch einen Laserpuls doppelt ionisiert, d.h. dass beide Elektronen durch die Energie des Laserpulses aus einem Bindungszustand in einen Kontinuumszustand gehoben werden und einen zweifach-positiv geladenen Atomkern (He^{++}) zurücklassen. Sie können nun annehmen, dass die beiden Elektronen nach dem Ionisierungsprozess weiterhin durch einen Singlett-Zustand beschrieben werden, selbst wenn sie nach der Emission in unterschiedliche Raumrichtungen eine große räumliche Distanz zueinander aufweisen.



(a) Verwenden Sie eine Clebsch-Gordan-Tabelle um zu zeigen, wie sich der Singlett-Zustand $|s = 0, m_s = 0\rangle$ in der Produktbasis der beiden Elektronen $|s_1, m_{s1}\rangle \otimes |s_2, m_{s2}\rangle$ anschreiben lässt. (Eine Clebsch-Gordan-Tabelle finden Sie im Skriptum oder bei der Particle Data Group.)

(b) Es werde nun zuerst an einem der beiden Elektronen der Wert $\hbar/2$ für die Observable S_α gemessen, wobei α die Projektion des Spins auf die negative x-Richtung angibt (sh. obige Abbildung eines entsprechenden Stern-Gerlach-Apparats mit $L_2 > L_1$). Welches Ergebnis können Sie im Mittel für eine darauffolgende Messung (i) von S_z und (ii) von S_x am zweiten Elektron erwarten?

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, in beiden Stern-Gerlach-Filtern eine positive $(+)$ Spin-Projektion zu messen, wenn die beiden Achsen der Spin-Filter einen relativen Winkel von θ zueinander aufweisen (in obiger Abbildung ist $\theta = \pi/2$). Interpretieren Sie Ihre Resultate physikalisch.
Hinweis: Die Rechnung lässt sich deutlich vereinfachen, wenn die Richtung der 1. Messung gut gewählt wird.

Bemerkung: Die Ergebnisse der obigen Punkte illustrieren mehrere fundamentale Eigenschaften der Quantentheorie: Dass durch den Kollaps der Wellenfunktion bei der Messung an einem der beiden Teilchen auch der Zustand des anderen Teilchens festgelegt wird - selbst wenn sich dieses räumlich weit entfernt aufhält - ist eine Konsequenz der quantenmechanischen "Nichtlokalität". Letztere folgt wiederum aus dem Superpositionsprinzip und der probabilistischen Naturbeschreibung durch die Quantentheorie. Der Umstand, dass der Messwert am zweiten Teilchen durch die Art der Messung am ersten Teilchen (wie z.B. die Projektionsachse bei der Spin-Messung) mitbeeinflusst wird, wird als "Quanten-Kontextualität" bezeichnet. Beide dieser Eigenschaften sind in der klassischen Physik vollkommen unbekannt und haben bei der Entwicklung der Quantenmechanik zu zahlreichen Diskussionen geführt. Unter anderem wies z.B. Einstein darauf hin, dass die Korrelationen zwischen den beiden räumlich getrennten Elektronen nur durch eine "spukhafte Fernwirkung" erklärt werden können. Die daraus gezogene Schlussfolgerung, dass die Quantentheorie keine vollständige Theorie sei, sondern noch zusätzliche "verborgene Parameter" beinhalte, ließ sich jedoch mittlerweile im Experiment widerlegen. Was Einstein jedoch beruhigt haben dürfte, ist der Umstand dass durch die instantane "Fernwirkung" zwischen den beiden Elektronen keine Information übertragen werden kann und somit das Kausalitätsgesetz der speziellen Relativitätstheorie nicht verletzt wird.

Anmerkung: In der Literatur wird bei der Kopplung zweier Spins $\hat{\mathbf{S}}_1$, $\hat{\mathbf{S}}_2$ zu einem Gesamtspin $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$ die gekoppelte Basis häufig mit Großbuchstaben notiert, d.h. $|S, M_s\rangle \equiv |s_1, s_2, S, M_s\rangle$.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1abc/1def/2/3.