NACHTEST : VU Statistische Physik SS10

22.10.2010, 14:00 Uhr

1. Betrachten Sie ein System mit N (unterscheidbaren) Spin-1/2-Teilchen in einem magnetischen Feld B. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{2} N J m^2 - \mu m J \sum_{i=1}^{N} \sigma_{z,i} \,.$$

wobei J eine Konstante und $m = (\mu/N) \sum_i^N \sigma_{z,i}$ die mittlere Magnetisierung ist (μ : magnetisches Dipolmoment eines Spins).

$$\sigma_{z,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist die Paulimatrix des i-ten Spins.

(a) Nehmen Sie an, dass das System in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T ist. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K und die freie Energie F des Systems.

Hinweis 1: für unterscheidbare Teilchen $Z_K(m, T, N) = [Z_K(m, T, 1)]^N$

Hinweis 2: $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ und $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$.

(b) Die freie Enthalpie im Nichtgleichgewicht ist durch $g(m, B, T, N) = F + NmB$ gegeben. Entwickeln Sie die freie Enthalpie in einer Taylor-Reihe um $m = 0$ und zeigen Sie, dass (laut Landau-Theorie) im Limes $B \to 0$ das System einen Phasenübergang zweiter Ordnung zeigt. Bestimmen Sie auch die kritische Temperatur T_c.

Hinweis :

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x), \; \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x), \; \frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

(c) Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität für ein schwaches Magnetfeld wenn $T > T_c$ sowie $T < T_c$.

2. Gegeben sei ein Gas, das aus N zweiatomigen Molekülen in einem zweidimensionalen Kasten (Volumen: V) besteht. Wenn die Schwingung zwischen den zwei Atomen eines Moleküls eingefroren ist und nur die Translationen (x_i, y_i) und Drehungen ($\theta_i \in [0, 2\pi]$) der Moleküle betrachtet werden, lautet die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_{x,i}^2}{2m} + \frac{p_{y,i}^2}{2m} + \frac{L_i^2}{2I} \right) .$$

L ist der Drehimpuls und I das Trägheitsmoment. Es gibt keine Wechselwirkung zwischen den Molekülen.

(a) Berechnen Sie die Anzahl der Zustände auf der Energieschale $[E - \Delta, E]$. Nehmen Sie an, dass $N \gg 1$.

Hinweis : Das Volumen einer D-dimensionalen Kugel mit Radius R ist

$$V_D(R) = \frac{\pi^{D/2} R^D}{\Gamma(D/2 + 1)}$$

(b) Berechnen Sie die Entropie S, die Temperatur T und die Wärmekapazität C_V des Systems.

Hinweis: Grundgleichung der Thermodynamik, $dE = TdS - pdV$.

3. Gegeben sei ein Gas in einem Kasten mit Volumen V in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T und einem Teilchenbad mit chemischem Potential μ. Die Hamiltonfunktion jedes Teilchens ist $H_i = |\vec{p}_i|^2/(2m)$. Nehmen Sie an, dass das Gas im Gleichgewichtszustand ist. Schreiben Sie die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r}_1, \vec{p}_1, \cdots, \vec{r}_N, \vec{p}_N; N)$ an.

Hinweis : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$.