1. Plenum aus Statistischer Physik (Lösung)

1. (a)

$$\text{Normierungsfaktor :} Z(a) = \int e^{-af(x)}\, dx$$

(b)

$$\begin{aligned}\langle f(x)\rangle &= \int f(x)\rho(x)\, dx = Z^{-1}\int f(x)e^{-af(x)}\, dx \\ &= -Z^{-1}\int \frac{\partial}{\partial a}e^{-af(x)}\, dx \\ &= -Z^{-1}\frac{\partial Z}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial a}\ln Z\end{aligned}$$

2. Variable-Transformation : $y \to f_0 = f(x,y)$

$$\int e^{-af(x,y)}dxdy = \int e^{-af_0}\delta\left(f(x,y) - f_0\right) dxdydf_0$$

Deshalb,

$$D(f_0) = \int \delta\left(f(x,y) - f_0\right) dxdy$$

3. Totales Differenzial

$$\begin{cases} df = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \\ dg = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)_y dx + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)_x dy \end{cases}$$

Wenn $g(x,y)$ festgehalten wird, $dg = 0$, d.h.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y dx = -\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x dy \quad \text{oder} \quad dy = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1} dx$$

Deshalb ist die Änderung f (mit $dg = 0$)

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1} dx$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}$$

4. Mit einem Lagrange-Multiplikator λ wird die Funktion

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\left(g(x,y) - c\right)$$

maximiert. Die kritische Punkte sind gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = 0\,.$$

Die Ableitung nach λ ergibt die Nebenbedingung $g(x,y)=c$. Aus diese Bedingungen

$$\lambda = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y^{-1} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}$$

oder es entspricht

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y .$$

Die letzte Formel ist äquivalent mit der Bedingung $(\partial f/\partial x)_g = 0$ im Bsp. 3.

5. (a) Die Funktion $-\mathcal{S}(E,\beta)$ ist maximal wenn $(\partial \mathcal{S}/\partial E)_\beta = 0$.

   (b) Die Funktion $\beta E - \mathcal{S}(E,\beta)$ ist maximal wenn $\beta - (\partial \mathcal{S}/\partial E)_\beta = 0$ oder $\beta = (\partial \mathcal{S}/\partial E)_\beta$.

   In allgemeinen Fall ist der Extrempunkt der Funktion $\mathcal{S}$ auf der Linie mit konstantem E anders als der Extrempunkt auf der Linie mit konstantem β. Andererseits hat die Legendre-transformierte Funktion $\mathcal{F}$ den Extrempunkt auf der Linie mit konstantem β, der gleich als der Extrempunkt der Funktion $\mathcal{S}$ auf der Linie mit konstantem E ist.