

3. Plenum aus Statistischer Physik

12.5.2010

1. (Mikrokanonisches Ensemble : Wahrscheinlichkeitsdichte)

Die Wahrscheinlichkeitsdichte eines mikrokanonischen Ensembles (Energie E) ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_N) = \frac{1}{Z_{\text{MK}}} \frac{1}{N! h^{3N}} \delta(E - H)$$

wobei Z_{MK} der Normierungsfaktor ist. Beantworten Sie die folgende Fragen wenn das System ein ideales Gas ($H = \sum_{i=1}^N |\vec{p}_i|^2 / (2m)$) in einem Kasten mit Volumen V ist.

- (a) Bestimmen Sie der Normierungsfaktor Z_{MK} .

Hinweis : Volumen der D -dimensionalen Kugel mit Radius R

$$V_D(R) = \frac{\pi^{D/2} R^D}{\Gamma(D/2 + 1)}$$

- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Hälfte der N Teilchen die Energie im Bereich $[E/2 - \Delta/2, E/2 + \Delta/2]$ hat. ($\Delta \ll E$)
- (c) Der Kasten wird in zwei Abteilungen mit dem gleichen Volumen $V/2$ getrennt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $N/2$ Teilchen sich in jeder Abteilung befinden. Nehmen Sie an, dass N eine gerade Zahl ist.

2. (Kanonisches Ensemble : maximale Entropie)

Betrachten Sie ein Ensemble von Gasen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Energie eines Gases E_i ist, ist p_i . Finden Sie die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{p_i\}$, die die Entropie

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

unter der Nebenbedingungen $\sum_i p_i = 1$ und $\sum_i E_i p_i = E$ maximiert.