

# 1. Test aus Statistischer Physik (Lösung)

1. (a) Entropie

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = k_B \ln \left( \frac{V^N}{N! \lambda^{3N}} \right) + \frac{3}{2} N k_B$$

(b) innere Energie

$$E = F + ST = \frac{3}{2} N k_B T$$

keine Änderung in  $V \rightarrow$  keine Arbeit

$$Q_A = \Delta E = \frac{3}{2} N k_B (T_2 - T_1)$$

Entropie

$$S(V, T, N) = \frac{3}{2} N k_B \ln T + \tilde{S}(V, N)$$

Der zweite Term  $\tilde{S}$  ist unabhängig von  $T$  und invariant während des Prozesses A ( $V$  und  $N$  sind konstant gehalten).

Entropieänderung

$$\Delta S_A = \frac{3}{2} N k_B (\ln T_2 - \ln T_1) = \frac{3}{2} N k_B \ln \frac{T_2}{T_1}$$

(c) Der Anfangszustand sowie der Endzustand des Prozesses B sind gleich als die entsprechende Zustände des Prozesses A. Weil in beiden Prozessen keine Arbeit an der Umgebung verrichtet wird, sollen die zugeführte Wärme gleich sein.

$$Q_B = Q_A = \frac{3}{2} N k_B (T_2 - T_1)$$

Oder die Energieänderung der Abteilung, der die Wärme  $Q_B$  zugeführt wird, ist

$$Q_B = \Delta E = \frac{3}{2} \frac{N}{M} k_B (T_3 - T_1)$$

wobei  $N/M$  die Anzahl der Teilchen in der Abteilung ist. Deshalb,

$$\frac{3}{2} N k_B (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \frac{N}{M} k_B (T_3 - T_1)$$

Die Temperatur  $T_3$  ist

$$T_3 = M T_2 - (M - 1) T_1$$

(d) Während des Schritts  $B_1$  ändert sich die Entropie nur in der Abteilung, der die Wärme zugeführt wird. Weil  $N/M$  Teilchen sich in einer Abteilung befinden, ist die Entropieänderung

$$\Delta S_{B1} = \frac{3}{2} \frac{N}{M} k_B \ln \frac{T_3}{T_1} = \frac{3}{2} \frac{N}{M} k_B \ln \left( M \frac{T_2}{T_1} - (M - 1) \right).$$

Während des Schritts  $B_2$  ändert sich die Entropie in allen Abteilungen. In einer Abteilung wird die Temperatur von  $T_3$  auf  $T_2$  gesenkt und in allen anderen Abteilungen von  $T_1$  auf  $T_2$  erhöht.

$$\Delta S_{B2} = \frac{3}{2} \frac{N}{M} k_B \ln \frac{T_2}{T_3} + (M - 1) \frac{3}{2} \frac{N}{M} k_B \ln \frac{T_2}{T_1} = \Delta S_A - \Delta S_{B1}$$

- (e) Prozess A und B<sub>1</sub> : quasi-statisch → reversibel  
 Prozess B<sub>2</sub> : Diffusion der Wärme → irreversibel  
 Deshalb ist der Prozess A reversibel und der Prozess B irreversibel.

2. Anzahl der Teilchen

$$\begin{aligned}
 \langle N \rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} \int N \rho(x_1, x_2, \dots, x_N, N) d^N x \\
 &= \frac{1}{Z} \sum_{N=0}^{\infty} \int N \frac{1}{N!} \exp \left[ -A \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 + BN \right) \right] d^N x \\
 &= -\frac{1}{A} \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial}{\partial B} \sum_{N=0}^{\infty} \int \frac{1}{N!} \exp \left[ -A \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 + BN \right) \right] d^N x \right)_A \\
 &= -\frac{1}{A} \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial}{\partial B} Z \right)_A \\
 &= -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial B} \right)_A \\
 &= -\frac{1}{A} \left( -A e^{-AB} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \right) \\
 &= e^{-AB} \sqrt{\frac{\pi}{A}}
 \end{aligned}$$

(Übungsbeispiel für Zuhause) Normierungsfaktor :

$$\begin{aligned}
 Z(A, B) &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int e^{-A \sum_{i=1}^N x_i^2 - ABN} dx_1 dx_2 \dots dx_N \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} e^{-ABN} \prod_{i=1}^N \int e^{-Ax_i^2} dx_i \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} e^{-ABN} \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\pi}{A}} \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left( e^{-AB} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \right)^N \\
 &= \exp \left[ e^{-AB} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \right]
 \end{aligned}$$

3. (a) Freie Enthalpie wenn  $P = (h_1/h_2)T$

$$g(T, N, P, n) = N [(-a_1 + a_2T + a_3P)\delta n^2 + b\delta n^4 + g_0(T, P)]$$

Gleichgewichtsbedingung

$$\left( \frac{\partial g}{\partial n} \right)_{T, N, P} = N [2(-a_1 + a_2T + a_3P)\delta n + 4b\delta n^3] = 0$$

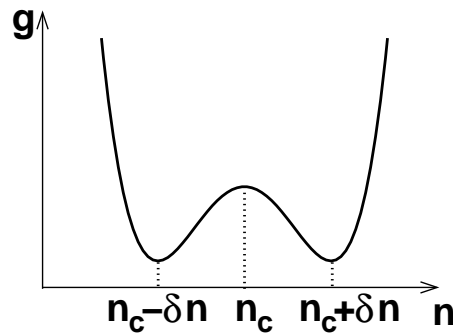
Wenn  $-a_1 + a_2T + a_3P \geq 0$ , ist  $\delta n = 0$  die einzige Lösung. Wenn  $-a_1 + a_2T + a_3P < 0$ , gibt es drei Lösungen

$$\delta n = 0 \text{ oder } \pm \sqrt{\frac{1}{2b}(-a_1 + a_2T + a_3P)}$$

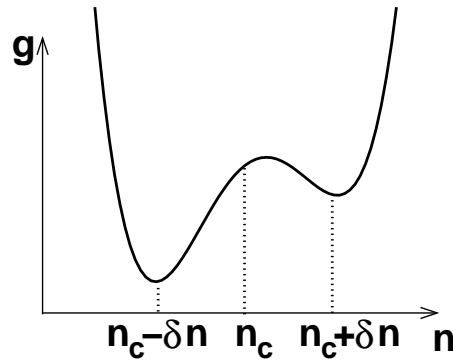
Das System zeigt einen Phasenübergang zweiter Ordnung bei  $-a_1 + a_2T + a_3P = 0$ . Weil  $P = (h_1/h_2)T$

$$a_2T_c^{(a)} + a_3(h_1/h_2)T_c^{(a)} = a_1 \rightarrow T_c^{(a)} = \frac{a_1h_2}{a_2h_2 + a_3h_1}$$

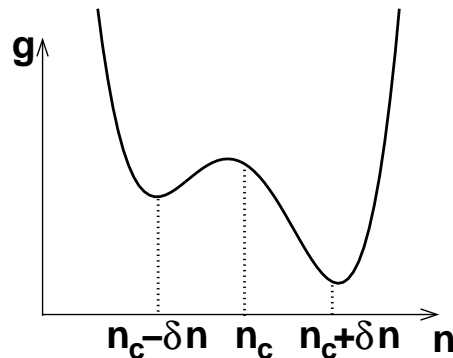
- (b) Aus dem Ergebnis von (a) hat die freie Enthalpie zwei Minima bei  $\delta n_1 = \sqrt{1/(2b)(a_1 - a_2T - a_3P)}$  und  $\delta n_2 = -\delta n_1$  wenn  $T = T_c^{(b)} = (h_2/h_1)P$  und  $-a_1 + a_2T + a_3P < 0$ .



Wenn  $T > T_c^{(b)}$ ,  $h_1T - h_2P > 0$ .



Wenn  $T < T_c^{(b)}$ ,  $h_1T - h_2P < 0$ .



Diskontinuierliche Änderung des Ordnungsparameter bei der kritischen Temperatur von  $n = n_c - \delta n_1$  zu  $n = n_c + \delta n_1 \rightarrow$  Phasenübergang erster Ordnung.