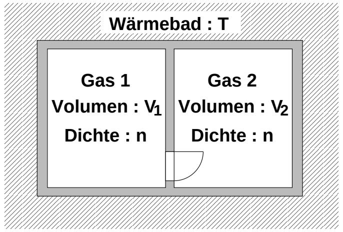
TEST 2 : VU Statistische Physik SS10

1. Betrachten Sie zwei Gase in zwei Zimmern (Volumen: V_1 und V_2). Die beide Gase sind in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T und haben die Teilchendichte n. Die Hamiltonfunktion jedes Teilchens in beiden Gasen ist gegeben durch

$$H_i = \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} .$$

Am Anfang sei die Tür zwischen den Zimmern geschlossen.



Hinweise: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$, $\quad \ln N! \simeq N \ln N - N$ wenn $N \gg 1$.

(a) (5Pkt.) Schreiben Sie die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r}_1, \vec{p}_1, \cdots)$ von Gas 1 an. Berechnen Sie den Normierungsfaktor als Funktion von V_1, T, und N_1 (N_1 : Teilchenzahl von Gas 1). Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist als $\int \rho \, d^{3N_1} r d^{3N_1} p = 1$ normiert.

(b) (5Pkt.) Berechnen Sie die Entropie $S(V_1, T, N_1) = -k_B \langle \ln(N_1! h^{3N_1} \rho) \rangle$ von Gas 1.

Wenn die Tür zwischen den Zimmern geöffnet wird, werden beide Gase gemischt und erreichen den Gleichgewichtszustand.

(c) (5Pkt.) Zeigen Sie, dass im Limes $N_1, N_2 \to \infty$ die Entropieänderung null ist, wenn die beide Gase ununterscheidbar sind.

(d) (5Pkt.) Zeigen Sie, dass die Entropie zunimmt, wenn die beide Gase unterscheidbar sind.

2. Gegeben sei ein Gas in einem Kasten mit Volumen V. Die Hamiltonfunktion jedes Teilchens in diesem Gas ist gegeben durch

$$H_i = \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} .$$

Das Gas ist im Gleichgewichtszustand bei konstanter Temperatur T und konstantem chemischen Potential μ. Die Zustandssumme dieses Gases ist

$$Z_{\mathrm{GK}} = \exp\left[e^{\beta\mu} \frac{V}{\lambda^3} \right]$$

wobei $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$.

(a) (5Pkt.) Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$.

(b) (5Pkt.) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$.

(c) (5Pkt.) Berechnen Sie die Wärmekapazität bei konstantem Volumen $C_V = (\partial \langle E \rangle / \partial T)_{\langle N \rangle, V}$.

3. (5Pkt.) Das großkanonische Potential des zweidimensionalen idealen Bosegases (ohne harmonischer Falle) ist gegeben durch

$$J = k_B T \sum_{n_x, n_y} \ln\left(1 - \exp\left[-\beta\left(\varepsilon_{n_x,n_y} - \mu\right)\right]\right)$$

wobei die Eigenenergie

$$\varepsilon_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2)$$

ist. Zeigen Sie, dass die mittlere Teilchenzahl in angeregten Zuständen annähernd gegeben ist durch

$$\langle N_e \rangle \simeq \frac{2\pi m L^2}{h^2} \int_0^\infty \frac{1}{\exp\left[\beta\left(\varepsilon - \mu\right)\right] - 1} d\varepsilon$$