1. Rechenübung aus Statistischer Physik (Lösung)

1.

$$\text{Normierungsfaktor} : Z(a,b) = \int e^{-a(f(x)+by)}\, dx\, dy$$

(a)

$$\begin{aligned}
\langle y \rangle &= \int y\rho(x,y)\, dx\, dy = Z^{-1}\int y e^{-a(f(x)+by)}\, dx\, dy \\
&= -\frac{1}{a}Z^{-1}\int \frac{\partial}{\partial b} e^{-a(f(x)+by)}\, dx\, dy \\
&= -\frac{1}{a}Z^{-1}\frac{\partial Z}{\partial b} = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial b}\ln Z
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\langle f(x) \rangle &= \int f(x)\rho(x,y)\, dx\, dy \\
&= -Z^{-1}\frac{\partial}{\partial a}\int e^{-a(f(x)+by)}\, dx\, dy - bZ^{-1}\int y e^{-a(f(x)+by)}\, dx\, dy \\
&= -\frac{\partial}{\partial a}\ln Z - b\langle y \rangle
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\langle f(x) \rangle &= \int f(x)\rho(x,y)\, dx\, dy \\
&= Z^{-1}\int f(x) e^{-a(f(x)+by)}\, dx\, dy \\
&= Z^{-1}\int f(x) e^{-af(x)} u^y\, dx\, dy \\
&= -Z^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial a}\int f(x) e^{-af(x)} u^y\, dx\, dy\right)_u = -\left(\frac{\partial}{\partial a}\ln Z\right)_u
\end{aligned}$$

2. Mit einem Lagrange-Multiplikator λ wird die Funktion

$$s(E,\{p_i\},\lambda) = -\sum_{i=1}^{\Omega(E)} p_i \ln p_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{\Omega(E)} p_i - 1\right)$$

maximiert. Die kritische Punkte sind gegeben durch

$$\frac{\partial s}{\partial p_i} = -\ln p_i - 1 + \lambda = 0 \quad \leftrightarrow \quad p_i = e^{\lambda-1} = C \quad (\text{konstant})\,.$$

$\{p_i\}$ mussen die Normierungsbedingung ($\partial s/\partial\lambda = 0$) erfüllen

$$\sum_{i=1}^{\Omega(E)} p_i = C\Omega(E) = 1 \quad \leftrightarrow \quad C = \frac{1}{\Omega(E)}\,.$$

Daher ist das maximale $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$\mathcal{S}_{\max} = -\sum_{i=1}^{\Omega(E)} \frac{1}{\Omega(E)}\ln\frac{1}{\Omega(E)} = \ln\Omega(E)\,.$$

3. E als eine Funktion von β

$$\beta = \frac{d\mathcal{S}}{dE} = \frac{1}{A}\ln\left(1 - \frac{E}{A}\right) \quad \leftrightarrow \quad E(\beta) = A(1 - e^{A\beta})$$

$\mathcal{S}$ als eine Funktion von β

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\left(E(\beta)\right) &= -\big(1 - (1 - e^{A\beta})\big)\ln\big(1 - (1 - e^{A\beta})\big) - (1 - e^{A\beta}) \\
&= -e^{A\beta}\ln\big(e^{A\beta}\big) - (1 - e^{A\beta}) \\
&= -A\beta e^{A\beta} - 1 + e^{A\beta}
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ als eine Funktion von β

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\beta\right) &= \beta E(\beta) - \mathcal{S}\left(E(\beta)\right) \\
&= \beta A(1 - e^{A\beta}) + A\beta e^{A\beta} + 1 - e^{A\beta} \\
&= \beta A + 1 - e^{A\beta}
\end{aligned}$$