2. Rechenübung aus Statistischer Physik (Lösung)

1. (a) Produzierte Wärme :
$$Q = H_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{G}}$$
Änderung der Temperatur des Wassers
$$T_2 - T_1 = \frac{Q}{c_{\mathrm{W}} V_{\mathrm{W}}} = \frac{H_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{G}}}{c_{\mathrm{W}} V_{\mathrm{W}}} \quad \rightarrow V_{\mathrm{G}} = \frac{c_{\mathrm{W}} V_{\mathrm{W}}}{H_{\mathrm{S}}}(T_2 - T_1)$$

   (b) Gleichgewicht : das Wasser und die Luft haben die gleiche Temperatur T
Die aus dem Wasser ausgelaufene Wärme :
$$\Delta Q_1 = c_{\mathrm{W}}(T_2 - T) V_{\mathrm{W}}$$
Die der Luft zugeführte Wärme :
$$\Delta Q_2 = c(T - T_{\mathrm{Z}}) V$$
1. Hauptsatz der Thermodynamik $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$
$$c_{\mathrm{W}}(T_2 - T) V_{\mathrm{W}} = c(T - T_{\mathrm{Z}}) V \quad \rightarrow \quad T = \frac{c_{\mathrm{W}} V_{\mathrm{W}} T_2 + c V T_{\mathrm{Z}}}{c_{\mathrm{W}} V_{\mathrm{W}} + cV}$$

2. (a)
$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{\partial}{\partial V}\left[N k_B T \ln(V - bN) + \frac{aN^2}{V}\right] = \frac{N k_B T}{V - bN} - \frac{aN^2}{V^2}$$

   (b)
$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = k_B \ln\left[\frac{(V - bN)^N}{N! \lambda^{3N}}\right] + \frac{3}{2} N k_B$$
$$E = F + ST = -\frac{aN^2}{V} + \frac{3}{2} N k_B T$$

   (c) Änderung der Wärme
$$dQ = dE + PdV$$
Wärmekapazität
$$\begin{aligned}
C_X &= \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{X,N} \\
&= \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{X,N} + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{X,N} \\
&= \left(\frac{\partial E(V(X,T),T,N)}{\partial T}\right)_{X,N} + P\left(\frac{\partial V(X,T)}{\partial T}\right)_{X,N} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial T}\left[-\frac{aN^2}{X} T + \frac{3}{2} N k_B T\right]\right)_{X,N} + P\left(\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{X}{T}\right]\right)_{X,N} \\
&= -\frac{aN^2}{X} + \frac{3}{2} N k_B - P\frac{X}{T^2} \\
&= -\frac{aN^2}{VT} + \frac{3}{2} N k_B - \left(\frac{N k_B T}{V - bN} - \frac{aN^2}{V^2}\right)\frac{V}{T} = \frac{V - 3bN}{V - bN} N k_B
\end{aligned}$$

(d)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,N} = -\frac{Nk_BT}{(V-bN)^2} + \frac{2aN^2}{V^3}$$

Kompressibilität:

$$\kappa_T = \frac{V^2(V-bN)^2}{V^3Nk_BT - 2aN^2(V-bN)^2} = \frac{(V-bN)^2}{VNk_B(T - 2aNV^{-3}k_B^{-1}(V-bN)^2)}$$

Bei der kritischen Temperatur, $V = 3bN$.

$$2aNV^{-3}k_B^{-1}(V-bN)^2 = \frac{8aNb^2N^2}{27k_Bb^3N^3} = \frac{8a}{27k_Bb} = T_c$$

Deshalb

$$\kappa_T = \frac{(V-bN)^2}{VNk_B(T-T_c)} \quad \rightarrow \quad \gamma = 1\,.$$