3. Rechenübung aus Statistischer Physik (Lösung)

1. (a) Bei der kritischen Temperatur

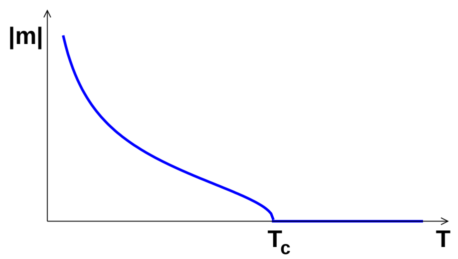
$$J\left(1-\frac{J}{k_B T_c}\right)=0 \quad \rightarrow \quad T_c=\frac{J}{k_B}$$

Gleichgewichtsbedingung : $\partial G/\partial m = 0$

$$4a_4 m^3 + 2J\left(1-\frac{J}{k_B T}\right)m = 0$$

Wenn $T > T_c$, gibt es ein Minimum bei $m = 0$. Wenn $T < T_c$, hat G ein lokales Maximum bei $m = 0$ und zwei globale Minima bei

$$m = \pm\sqrt{\frac{J}{2a_4}\left(\frac{J}{k_B T}-1\right)}.$$



(b) Entwicklung der Magnetisierung $m(B)$

$$m(B) \simeq m(0) + \left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_T\bigg|_{B=0} B$$

($\partial m/\partial B$: Suszeptibilität)
Gleichgewichtsbedingung :

$$4a_4 m^3 + 2J\left(1-\frac{J}{k_B T}\right)m - B = 0$$

Ableitung nach B

$$12a_4 m^2\left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_T + 2J\left(1-\frac{J}{k_B T}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_T - 1 = 0$$

Deshalb

$$\left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_T = \left(12a_4 m^2 + 2J\left(1-\frac{J}{k_B T}\right)\right)^{-1}$$

Magnetisierung :

$$m(B) \simeq m(0) + \left(12a_4 m(0)^2 + 2J\left(1-\frac{J}{k_B T}\right)\right)^{-1} B$$

Wenn $T > T_c$, $m(0) = 0$.

$$m(B) \simeq \left(2J\left(1-\frac{J}{k_B T}\right)\right)^{-1} B = \frac{k_B T}{2J(k_B T - J)} B$$

Wenn $T < T_c$, $m(0) = \pm\sqrt{\frac{J}{2a_4}\left(\frac{J}{k_BT} - 1\right)}$.

$$\begin{aligned} m(B) &\simeq \pm\sqrt{\frac{J}{2a_4}\left(\frac{J}{k_BT} - 1\right)} + \left(6J\left(\frac{J}{k_BT} - 1\right) + 2J\left(1 - \frac{J}{k_BT}\right)\right)^{-1} B \\ &= \pm\sqrt{\frac{J}{2a_4}\left(\frac{J}{k_BT} - 1\right)} + \frac{k_BT}{4J(J - k_BT)} B \end{aligned}$$

2. (a) Gleichgewichtsbedingung $\partial G/\partial\eta = 0$.

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = 12\eta^5 - 12(\eta_1^2 + \eta_2^2)\eta^3 + 12\eta_1^2\eta_2^2\eta = 12\eta(\eta^2 - \eta_1^2)(\eta^2 - \eta_2^2)\,.$$

G hat lokale Minima bei $\eta = 0, \pm\eta_1$ und lokale Maxima bei $\eta = \pm\eta_2$. Bei der kritischen Temperatur des diskontinuierlichen Phasenübergangs sollen alle Minima globale Minima sein, d.h.

$$\begin{aligned} G(\eta = 0, T_c) &= G(\eta = \pm\eta_1, T_c) \\ G_0 &= 2\eta_1^6 - 3(\eta_1^6 + \eta_1^4\eta_2^2) + 6\eta_1^4\eta_2^2 + G_0 \\ 0 &= -\eta_1^6 + 3\eta_1^4\eta_2^2 \\ \eta_1^6 &= 3\eta_1^4\eta_2^2 \end{aligned}$$

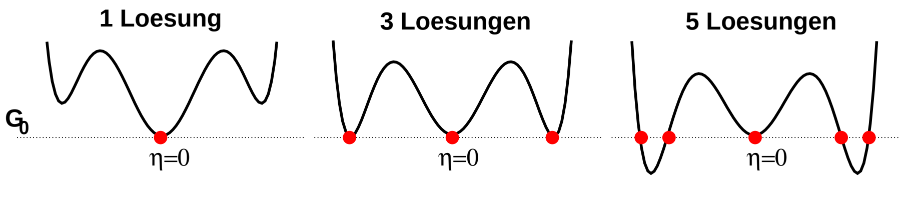
Weil $\eta_1 > \eta_2 > 0$, $\eta_1 = \sqrt{3}\eta_2$.

Alternative Lösung :

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\partial G/\partial\eta = 0$ hat G ein lokales Minimum $G(\eta = 0, T) = G_0$ bei $\eta = 0$. Bei der kritischen Temperatur des diskontinuierlichen Phasenübergangs sollen alle Minima globale Minima sein. Die Lösungen der Gleichung $G(\eta, T) = G_0$

$$\eta = 0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3(\eta_1^2 + \eta_2^2) \pm \sqrt{9\eta_1^4 + 9\eta_2^4 - 30\eta_1^2\eta_2^2}} \qquad (1)$$

sind die Ordnungsparameter, bei den die freie Enthalpie gleich als G_0 ist.



Ein Phasenübergang erster Ordnung wird beobachtet wenn die Gleichung nur drei Lösungen hat. Die Bedingung für drei reelle Lösungen ist

$$9\eta_1^4 + 9\eta_2^4 - 30\eta_1^2\eta_2^2 = 0 \qquad (2)$$

(Eine Lösung wenn $9\eta_1^4 + 9\eta_2^4 - 30\eta_1^2\eta_2^2 < 0$ und 5 Lösungen wenn $9\eta_1^4 + 9\eta_2^4 - 30\eta_1^2\eta_2^2 > 0$) Weil $\eta_1 > \eta_2 > 0$, $\eta_1 = \sqrt{3}\eta_2$.

(b)

$$G(\eta = \pm\eta_1, T) - G(\eta = 0, T) = -\eta_1^4(\eta_1^2 - 3\eta_2^2)$$

Wenn $T > T_c$, $G(\eta = \pm\eta_1, T_c) > G(\eta = 0, T_c)$. Deshalb ist das globale Minimum (Gleichgewichtszustand) bei $\eta = 0$. Die freie Enthalpie ist

$$G = G(\eta = 0, T) = G_0\,.$$

Wenn $T < T_c$, $G(\eta = \pm\eta_1, T_c) < G(\eta = 0, T_c)$. Deshalb sind die globalen Minima (Gleichgewichtszustand) bei $\eta = \pm\eta_1$. Die freie Enthalpie ist

$$G = G(\eta = \pm\eta_1, T) = -\eta_1^4(\eta_1^2 - 3\eta_2^2) + G_0\,.$$