1. Rechenübung aus Statistischer Physik

1. $\rho(x,y) = Z^{-1}\exp[-a(f(x)+by)]$ ist eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf kontinuierlichen reellen Variablen, x und y.

   (a) Zeigen Sie, dass der Mittelwert von y gegeben ist durch

   $$\langle y\rangle = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial b}\ln Z\,.$$

   (b) Zeigen Sie, dass der Mittelwert von $f(x)$ gegeben ist durch

   $$\langle f(x)\rangle = -\frac{\partial}{\partial a}\ln Z - b\langle y\rangle\,.$$

   (c) Zeigen Sie, dass der Mittelwert von $f(x)$ auch durch

   $$\langle f(x)\rangle = -\left(\frac{\partial}{\partial a}\ln Z\right)_u$$

   gegeben sein kann. In der Ableitung nach a wird das Variable $u = e^{-ab}$ festgehalten.

2. Finden Sie die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{p_i\}$, die die Funktion

   $$\mathcal{S} = -\sum_{i=1}^{\Omega(E)} p_i \ln p_i$$

   unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{\Omega(E)} p_i = 1$ maximiert. Berechnen Sie das Maximum von $\mathcal{S}$.

3. Gegeben sei eine Funktion von E,

   $$\mathcal{S}(E) = -\left(1-\frac{E}{A}\right)\ln\left(1-\frac{E}{A}\right) - \frac{E}{A}$$

   Schreiben Sie die Legendre-Transformation ($\mathcal{F}(\beta) = \beta E - \mathcal{S}(E)$) von $\mathcal{S}(E)$ an. Die Funktion $\mathcal{F}(\beta)$ hängt nur von $\beta = dS/dE$ und A (Konstante) ab.