4. Rechenübung aus Statistischer Physik

1. Gegeben sei ein Ensemble von Teilchen. Jedes Teilchen (Masse m) fällt im Gravitationsfeld und springt verlustfrei vom Boden zurück auf. Die Hamiltonfunktion des Teilchens ist gegeben durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \begin{cases} mgz & \text{wenn } (z > 0) \\ \infty & \text{wenn } (z < 0) \end{cases} .$$

   Nehmen Sie an, dass die Bewegung eindimensional (entlang der z Achse) ist.

   (a) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen $\Phi(E)$ für $H < E$.

   (b) Berechnen Sie die Anzahl der Zustände $\Omega(E)$ auf der Energieschale $E < H < E + \Delta$.

   (c) Das Ensemble ist ein mikrokanonisches Ensemble. Zeigen Sie dass die Energie des Teilchens gegeben ist durch

$$E = \frac{1}{2} k_B T \, .$$

2. Betrachten Sie ein Ensemble von zweidimensionalen Gasen. Jedes Gas besteht aus N zweiatomigen Molekülen und befindet sich in einem Kasten mit Volumen V. Für eine große Konstante K ist die Hamiltonfunktion eines Moleküls annähernd gegeben durch

$$H_i = \frac{p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2}{2M} + \frac{L_i^2}{2I} + \frac{p_{r,i}^2}{2\mu} + \frac{1}{2} K (r_i - r_0)^2 \, .$$

   (x, y) und (p_x, p_y) sind Position und Impuls des Schwerpunkts, θ und L_i sind Winkel und Drehimpuls der Drehungen und r und p_r sind Abstand und Impuls der Schwingungen zwischen zwei Atomen. M, μ, I und r_0 sind positive Konstante.

   (a) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen $\Phi(E)$ für die Energie des Gases $H = \sum_{i=1}^{N} H_i < E$. Nehmen Sie an, dass $V \gg N\pi r_0^2$.

   (b) Das Ensemble ist ein mikrokanonisches Ensemble. Zeigen Sie dass die Zustandsgleichung gegeben ist durch

$$PV = N k_B T \, .$$

   Nehmen Sie an, dass $N \gg 1$.

   Hinweis 1: Die Transformation zwischen den Kartesischen Koordinaten $(\vec{r}, \vec{p})$ und den Polarkoordinaten (r, θ, p_r, L) ist kanonisch.

   Hinweis 2: Volumen der D-dimensionalen Kugel mit Radius R

$$V_D(R) = \frac{\pi^{D/2} R^D}{\Gamma(D/2 + 1)}$$