5. Rechenübung aus Statistischer Physik

1. Betrachten Sie das Ensemble von Gasen zweiatomiger Moleküle aus Beispiel 2 im Tutorium vom 30.4.

   Die Hamiltonfunktion eines Gases ist $H = \sum_{i=1}^{N} H_i$ mit

   $$H_i = \frac{p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2}{2M} + \frac{L_i^2}{2I} + \frac{p_{r,i}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}K(r_i - r_0)^2 \,.$$

   (Hinweise: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$, $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ und $P = -(\partial F/\partial V)_{N,T}$)

   (a) Nehmen Sie an, dass das Ensemble ein kanonisches Ensemble ist. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_c des Systems.

   (b) Laplace-Transformieren Sie die Zustandsdichte $D_0(E, V, N)$ zur Funktion $Z(\beta, V, N)$ (d.h. die Transformation von Energie E zu Temperatur $\beta = 1/(k_B T)$) und zeigen Sie, dass die Funktion Z die kanonische Zustandssumme Z_c aus (a) ist. Die Zustandsdichte (Anzahl der Zustände pro Energieeinheit) ist $D_0(E, V, N) = (2N!h^{4N})^{-1}\partial\Phi(E, V, N)/\partial E$. Benutzen Sie für das Phasenraumvolumen Φ das Ergebnis aus dem letzten Tutorium. (Siehe auch Beispiel 2 im Plenum vom 5.3)

   (c) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$.

   (d) Berechnen Sie die Varianz der Energie $\langle (\Delta E)^2 \rangle = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$ und zeigen Sie, dass im Limes $N \to \infty$ die relative Abweichung $\sqrt{\langle (\Delta E)^2 \rangle}/\langle E \rangle$ zu null konvergiert.

   (e) Berechnen Sie die nötige Wärmemenge wenn die Temperatur des Gases bei konstantem Druck P und konstanter Teilchenzahl N von T_1 auf T_2 erhöht wird.