6. Rechenübung aus Statistischer Physik

1. Gegeben sei ein Gas in einem Kasten mit Volumen V in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Das Gas besteht aus N Teilchen. Die Hamiltonfunktion jedes Teilchens ist $H_i = |\vec{p}_i|^2/(2m)$. Nehmen Sie an, dass das Gas im Gleichgewichtszustand ist.

   (a) Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r}_1, \vec{p}_1, \cdots, \vec{r}_N, \vec{p}_N)$ der N Teilchen im $6N$-dimensionalen Phasenraum an und berechnen Sie den Normierungsfaktor der Wahrscheinlichkeitsdichte.
   Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$.

   (b) Die Anzahl der Teilchen in einen gegebenen Teil des Kastens mit Volumen $V_1 = \gamma V (\gamma \ll 1)$ wird gemessen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(N_1)$, dass die gemessene Anzahl N_1 ist.

   (c) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle N_1 \rangle$ und schreiben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(N_1)$ als eine Funktion von N_1 und $\langle N_1 \rangle$ an. Zeigen Sie, dass im Limes $\gamma \to 0$, $P(N_1)$ eine Poisson-Verteilung ist.

   Hinweis 1: Wenn $N \gg N_1$,

   $$\frac{N!}{N^{N_1}(N - N_1)!} \simeq 1$$

   Hinweis 2:

   $$\lim_{x \to 0} (1 - x)^{1/x} = \frac{1}{e}$$

2. Betrachten Sie ein Gas in einer harmonischen Falle. Die Hamiltonfunktion jedes Teilchens ist gegeben durch

   $$H_i = \frac{p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2 + p_{z,i}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

   wobei ω konstant ist. Nehmen Sie an, dass das Gas im Gleichgewichtszustand bei konstanter Temperatur T und konstantem chemischen Potential μ ist.

   (a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme.

   (b) Berechnen Sie die Mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$.

   (c) $P(N)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich N Teilchen in der harmonischen Falle befinden. Zeigen Sie, dass $P(N)$ eine Poisson-Verteilung ist.